Cours de mathématiques Terminale D

BÉRÉ Frédéric

24 février 2015

Table des matières

1

Fonctions numériques : limites et continuité

1.1 Rappels sur la notion de limites

Soit f une fonction numériques, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
L'étude de la limite de f en a n'a de sens que s'il existe un intervalle dont une borne est a contenu dans D_f.

1.1.1 Limites des fonctions de réferences

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x = -\infty \quad ; \lim_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty \quad ; \ \forall\ a \in \mathbb{R} \lim_{x \longrightarrow a} C = C; \ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n = +\infty (\text{si } n \text{ pair}); \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n = -\infty (\text{si } n \text{ impair}); \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0; \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0; \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0; \lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty; \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty; \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty;$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

1.1.2 Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Soit f et g deux fonctions numériques.

* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) + \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$ sauf dans le cas où $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) + g(x) = +\infty - \infty$.
* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) \times \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$ sauf dans le cas où $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)g(x) = 0 \times \infty$.
* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)}{\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)}$ dans le cas où $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}^*$

1.1.3 Limite d'une fonction en un point

Soit x_0 un réel et f une fonction numérique définie sur un intervalle contenant x_0. Si f admet une limite en x_0 alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemples
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 - x$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$

1.1.4 Autres limites indéterminées

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1\,;\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

Exemple

Calculer : $\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$

1.1.5 Théorèmes géneraux sur les limites

1.1.5.1 Unicité

Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

1.1.5.2 Limite et ordre

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un même intervalle I. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ la borne d'un intervalle contenu dans I.
Si $\forall\ x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ et si f et g admettent une limite en a alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) \leq \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$

Conséquences

1. *Si* $\forall\ x \in I,\ f(x) \geq 0$ (*resp* $f(x) \leq 0$) *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) \geq 0$ (*resp* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) \leq 0$)
2. *Si* $\forall\ x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ *et si* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$
3. *Si* $\forall\ x \in I,\ f(x) \geq g(x)$ *et si* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$
4. *Si* f, g *et* h *sont trois fonctions définies sur* I *admettant chacune une limite en* a *et tel que* $\forall\ x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *avec* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} h(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = l$ *(Théorème des gendarmes)*
5. *S'il existe une fonction numérique* u *définie sur* I *tel que* $\forall\ x \in I,\ |f(x)| \leq |u(x)|$ *et si* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = 0$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$

Exemples

1. *Soit*
$$f : x \longmapsto \frac{x + \sin x}{2x + 1}$$
Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$
2. *Soit*
$$g(x) = x \sin\frac{1}{x}$$
Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g(x)$

1.1.5.3 Limite de la composée de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques tel que gof soit définie. Soient $a,\ b,\ l$ trois éléments de l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow b} g(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a} gof(x)=l$

Exemple
Soit

$$g(x)=x\sin\frac{1}{x}$$

Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x)$.

1.1.6 Extension de la notion de limite

Soit a un réel, I un intervalle contenant a. f une fonction numérique définie sur $I-\{a\}$ définie ou non en a.

1.1.6.1 Définition

Si f_1 admet une limite en a, cette limite s'appelle la limite de f à gauche en a. On la note $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x)$.

Si f_2 admet une limite en a, cette limite s'appelle la limite de f à droite en a. On la note $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)$.

1.1.6.2 Théorème

Soit a un réel, I un intervalle contenant a. f une fonction nu numérique définie sur $I-\{a\}$

1. Si f n'est pas définie en a et si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=l$
2. Si f est définie en a, f admet une limite en a sssi f admet $f(a)$ pour limite à gauche en a et $f(a)$ pour limite à droite en a.

Exemples

1. *Soit*
$$f:x\longmapsto\frac{|x|\sin x}{x^2}$$
Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$
2. *Soit*
$$f:\longmapsto\frac{\sin^2 x}{|x|}$$
Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$
3. *Soit f la fonction définie par :*
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & Si\ x\in\ ]-\infty,\ 0[\,; \\ 2x+1, & Si\ x\in\ ]0,\ +\infty[\,; \\ -1, & Si\ x=0.\end{cases}$$
Etudier la limite de f en 0.

1.1.7 Interprétation graphique : asymptote à une courbe

On considère le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}$ sa courbe representative dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1.1.7.1 Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

On suppose que f est définie sur un intervalle du type $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
Si $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = l$ ou si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l$ on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe de $\mathcal{C}$.

1.1.7.2 asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

On suppose qu'il existe une réel x_0 tel que $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ et x_o est la borne d'un intervalle de $\mathcal{D}_f$.
On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe de f lorsque $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \infty$.

1.1.7.3 Asymptote non parallèle aux axes de coordonnées

1. **Définition**
   On suppose que f est définie sur un intervalle du type $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
   S'il existe deux réels m et p tels que : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} [f(x) - (mx+p)] = 0$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} [f(x) - (mx+p)] = 0$.
   On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe de $(\mathcal{C})$.
   NB : Si $m \neq 0$, cette asymptote n'est parallèle à aucun des axes de cooronnées.
2. **Théorème**
   On suppose que f est définie sur un intervalle du type $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
   S'il existe deux réels m et p et une fonction ϵ définie sur le même intervalle que f tel que $f(x) = mx + p + \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \epsilon(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe de $(\mathcal{C})$.

   NB : On démontre que la droite d'équation de $y = mx + p$ est asymptote à la courbe de f sssi $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} [f(x) - mx] = p$.

1.2 Continuité d'une fonction numérique

1.2.1 Fonction continue sur un intervalle

1.2.1.1 Définitions

Soit f définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$.

Définition
On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I lorsque f est définie sur I et que sa courbe sur I peut se tracer « sans lever le crayon ».

Définition
On dit qu'une fonction f est continue en a $(a \in \mathbb{R})$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. *f est définie en a.*

2. *$f(x)$ admet une limite quand x tend vers a.*
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si l'une quelconque de ces trois conditions n'est pas vérifiée, on dit que f n'est pas continue en a, ou qu'elle présente une discontinuité en a.

Remarque
Parfois le comportement d'une fonction f est différent à gauche et à droite d'un réel a. Il pourra alors être utile pour étudier l'existence d'une limite en a d'étudier les éventuelles limites à gauche et à droite de a, i.e. *:*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) \quad \textit{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$$

Si ces limites existent, alors, dire que f est continue en a revient à dire que ces deux limites sont égales à $f(a)$.

Définition
On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I lorsque f est continue en tout réel a de I.

Convention : Dans un tableau de variation, lorsqu'on note une flèche pour une fonction croissante (ou décroissante) sur un intervalle, cette flèche signifie aussi la continuité de la fonction sur l'intervalle. On mettrait une double barre en un point de discontinuité.

1.2.1.2 Théorème

Nous admettons que les fonctions $x \longmapsto C,\ C \in \mathbb{R};\ x \longmapsto |x|;\ x \longmapsto x;\ x \longmapsto x^2;\ x \longmapsto \dfrac{1}{x};$ $x \longmapsto \sqrt{x};\ x \longmapsto \sin x; x \longmapsto \cos x$ sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

1.2.1.3 Opérations sur les fonctions continues

Nous admettons que :

* Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un même intervalle alors les fonctions $f+g,\ \alpha f\ (\alpha \in \mathbb{R}),\ fg$ sont définies et continues sur I.
  Si de plus g n'est pas nulle sur I alors les fonctions $\dfrac{1}{g},\ \dfrac{f}{g}$ sont définies et continues sur tout intervalle J sur lequel g ne s'annule pas.
* Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I et g définie et continue sur $f(I)$ alors gof est définie et continue sur I.

Conséquences : Toutes fonctions polynômes est continue sur sont ensemble de définition.
Toutes fractions rationnelles est continue sur son ensemble de définition.

Exemple
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1, & \textit{Si } x \in]-\infty, 0]\,; \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \textit{Si } x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$

1.2.2 prolongement par continuité

Théorème et définition

Soient a un réel, I un intervalle contenant a, f une fonction numérique définie sur $I-\{a\}$ et admettaant en a une limite finie l ($\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=l,\ l\in\mathbb{R}$) .
La fonction numérique g définie sur I par :

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \forall\ x\in I-\{a\}\,; \\ l, & \text{Si } x=a. \end{cases}$$

est l'unique prolongement par continuité de f sur I en a.

Exemples

1. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par :*

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car non définie en 3, mais :

$$x\neq 3 \implies f(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

Ainsi la courbe de f est la droite d'équation : $y=x+3$ à laquelle il manque le point d'abscisse 3. On pose alors la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$:

$$\widetilde{f}(x)=x+3. \quad \textit{donc} \quad \widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \textit{si } x\neq 3, \\ 6 & \textit{si } x=3. \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est alors continue sur $\mathbb{R}$, on dit que c'est un prolongement de f par continuité en 3.

2. *Soit*

$$f: x\longmapsto \frac{\sin x}{x}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

3. *Soit*

$$f: x\longmapsto \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

4. *Soit*

$$f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{\cos x-1}{x}, & \textit{Si } x\in]-\infty,0[\,; \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \textit{Si } x\in]0,+\infty[. \end{cases}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

1.2.3 Fonctions continues strictement monotone

1.2.3.1 Image d'un intervalle

Théorème 1

Nous admettons que :
– L'image d'un intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est un intervalle.
– L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue sur cet intervalle est un intervalle fermé.

Conséquence : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$ en particulier si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$

Exemple
Soit $f : x \longmapsto x^3 - x + 1$ *et* $I = [-1, 2]$
$f(-1) = 1,\ f(2) = 7$
f *est continu sur* I*. on a* $1 < 3 < 7$ *donc l'équation* $f(x) = 3$ *admet au moins une solution dans* I*.*
$f(-2) = -5 \Longrightarrow f(-2) \times f(-1) < 0$ *donc l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution dans* $]-2, -1[$

Théoreme 2

Soit f une fonction numérique définie continue et strictement monotone sur un intervalle I de borne a et b, $(a < b)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ admettant en a une limite A et en b une limite égale à B. On a les résultats suivants :

Intervalle I	f(I) si f est srtictement croissante	f(I) si f est srtictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), B[$	$]B, f(a)]$
$]a, b]$	$]A, f(b)]$	$[f(b), A[$
$]a, b[$	$]A, B[$	$]B, A[$

Exemples

1. *Soit*
$$f : x \longmapsto x^3 + x - 1$$
.
Déterminer $f([0, 1])$
2. *Soit*
$$f : x \longmapsto \frac{1}{x+1}$$
Déterminer $f(]-1, 0])$

Théorème 3

Soit f une fonction numérique définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I de borne a et b admettant en a une limite A et en b une limite B.
Si $A < 0 < B$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans I.
Si $A < y < B$ alors l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans I.

1.2.3.2 Bijection réciproque

Définition

Soit f une application définie d'un intervalle I vers un intervalle J. On dit que f est bijective de I sur J lorsque $\forall\ y \in J$ l'équation d'inconnue x, $f(x) = y$, admet une unique solution dans I.
si f est bijective de I sur J l'application f^{-1} définie de J vers I par :
$\forall\ x \in I,\ \forall\ y \in J,\ f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$ *s'appelle la réciproque de f. Elle est bijectve.*

Théorème

Soit f une fonction numérique définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est définie, continue et strictement monotone sur $f(I)$ et a même sens de variation que f.

Exemple

Soit

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x+1}$$

Montrer que f réalise une bijection sur $]-1, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

2

Fonctions numériques : dérivation, primitives

2.1 Rappels et compléments sur les dérivations

2.1.1 Rappels sur la dérivée

2.1.1.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé

★ Théorème

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Les trois énoncés suivantes sont équivalentes :

E_1 **:** Il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$

E_2 **:** Il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$

E_3 **:** Il existe un réel l et une fonction ϵ définie sur I tel que : $\forall\ x \in I,\ f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$

★ Définition

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 sssi l'un quelconque des trois énoncés ci dessus est vrai. Le réel l s'appelle alors le nombre dérivé de f et est noté $f'(x_0)$.

Exemple
Soit $f(x) = x^2$. Monter que f est dérivable en 3.

★ Théorème

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

2.1.1.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Si les énoncés $E_1,\ E_2,\ E_3$ sont vrais lorsque les limites sont calculé à gauche (resp à droite) en x_0 ou en 0 selon les cas on dit que f est dérivable à gauche (resp à droite).
Le réel l est appelée le nombre dérivée de f à gauche en x_0 (resp à droite en x_0).

Exemple
Soit $f(x) = |x|$. Etudier la dérivabilité à gauche et à droite de 0.

2.1.1.3 Dérivabilité sur un intervalle ; fonction dérivée

Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable sur I si elle est dérivable en tout élément de I. Dans ce cas, la fonction défine de I vers $\mathbb{R}$ qui à tout élément $x \longmapsto f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f sur I noté f' ou $\dfrac{df}{dx}$.
Les fonctions $x \longmapsto C,\ C \in \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,\ x \longmapsto \sqrt{x},\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivable sur leur ensemble de définition.

Fonction f	Fonction f'
$x \longmapsto C,\ C \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto 2x$
$x \longmapsto ax+b$	$x \longmapsto a$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto -\sin x$

2.1.1.4 Dérivées successives

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I, sa fonction dérivée f' est parfois appélé sa dérivée première. Si f' est dérivable sur I sa fonction dérivée est appelée la dérivée séconde de f et est notée f''. On dit alors que f est deux fois dérivable sur I.
Si f'' est dérivable sur I sa fonction dérivée est appelée la dérivée troisième de f et est notée f''' ou $f^{(3)}$. On dit alors que f est trois fois dérivable sur I.

Exemple
Soit $f(x) = 8x^7$. Déterminer $f''''(x)$.

2.1.1.5 Opérations sur les fonctions numériques

Soient u et v deux fonctions numériques définies et dérivable sur un intervalle I.

* la fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.
* Pour tout réel, la fonction au est dérivable sur I et $(au)' = au'$.
* La fonction uv est définie sur I et $(uv)' = u'v + v'u$.
* Si I contient un intervalle J sur lequel v ne s'annule pas alors les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont définies et dérivables sur J et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.
* SI u est dérivable sur I alors $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Exemple
Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f(x) = x^7,\ g(x) = (x^2+1)\cos x,\ h(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+3}$

2.1.1.6 Dérivée de la composée de deux fonctions

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I. g une fonction numérique définie et dérivable sur $f(I)$. La fonction gof est définie et dérivable sur I et $(gof)' = f' \times (g'of)$.
Conséquences : Soit u une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I.

– La fonction $x \longmapsto \cos u(x)$ est dérivable sur I et $(\cos u(x))' = -u'(x)\sin u(x)$.
– La fonction $x \longmapsto \sin u(x)$ est dérivable sur I et $(\sin u(x))' = u'(x)\cos u(x)$.
Cas particulier : $[\cos(ax+b)]' = -a\sin(ax+b)$ et $[\sin(ax+b)]' = a\cos(ax+b)$

Si I contient un intervalle J sur lequel u est strictement positive alors la fonction $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur J et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Cas particulier : $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \forall x$ tel que $ax+b>0,\ (\sqrt{ax+b})' = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

2.1.1.7 Dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I. Si sa dérivée f' est strictement positive ou strictement négative sur I alors f est bijective de I sur $f(I)$. Sa bijection réciproque est alors dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'of^{-1}}$

2.1.2 Interprétation graphique

Définition

On considère le plan muni d'un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$. f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I contenant un réel x_0. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1. Si f est dérivable en x_0, la droite passant par le point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 et ayant pour coeficient directeur $f'(x_0)$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
   Cette tangente à pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
2. Si f est dérivable a gauche en x_0 (resp a droite en x_0) et si le nombre dérivé de f à gauche en x_0 est m_g (resp le nombre dérivé à droite en x_0 est m_d) alors la demi droite passant par A d'abscisse x_0 et de coeficient directeur m_g (resp m_d) est appelé la démi tangente à $\mathcal{C}$ à gauche en A (resp à droite en A).
   Elle a pour équation $y = f(x_0) + m_g(x - x_0),\ x \leq x_0$ (resp $y = f(x_0) + m_d(x - x_0),\ x \geq x_0$).

Remarque : Si $m_d \neq m_g$, f n'est pas dérivable en x_0. On dit que A est un point anguleux.
Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente (demi tangente selon le cas) verticale d'équation $x = x_0$.
Si au point A la tangente à $\mathcal{C}$ traverse $\mathcal{C}$, on dit que A est un point d'inflexion.
On démontre que si f est deux fois dérivable sur un intervalle contenant x_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.

2.1.3 Dérivée et sens de variation

Théorème
Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. *f est constante sur I* $\Longleftrightarrow\ \forall\ x \in I,\ f'(x) = 0$
2. *f est croissante sur I* $\Longleftrightarrow\ \forall\ x \in I,\ f'(x) \geq 0$
3. *f est décroissante sur I* $\Longleftrightarrow\ \forall\ x \in I,\ f'(x) \leq 0$
4. *f est strictement croissante(resp strictement décroissante) sur I* $\Longleftrightarrow \forall\ x \in I, f'(x) > 0$
   (*resp* $\forall\ x \in I, f'(x) < 0$)

Remarque : Si $\forall\ x \in I,\ f'(x) \geq 0$ (resp $f'(x) \leq 0$) et si f' n'est pas nulle sur un intervalle J de I alors f est strictement croissante (resp strictement décroissante sur J).

Exemple
Soit

$$f : x \longmapsto x + 1 + \frac{1}{x-2}$$

Déterminer le sens de variation de f.

2.1.4 Dérivée et extremum

Théorème
Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I ouvert contenant x_0. Si f présente en x_0 un extremum alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque : La reciproque de ce théorème est fausse.

Exemples

1. *Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Montrer que f présente un extremum dont on déterminera la nature.*
2. *Soit $f(x) = x^3 + 1$.*
   On a $f'(x) = 3x^2$ et $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$ n'est pas un maximum ni un minimum.

Théorème
Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I ouvert contenant x_0. f présente en x_0 un extremum sssi f' s'annule en x_0 en changeant de signe.

2.1.5 Inégalité des accroissements finis

2.1.5.1 Théorème 1

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. S'il existe deux réels m et M tel que $\forall\ x \in [a, b],\ m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ ou de façon équivalente $m \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M$

2.1.5.2 Théorème 2

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b élément de I.
S'il existe un réel positif k non nul tel que $\forall\ x \in I,\ |f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$

Exemple
Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1. *Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 comprise entre 1 et 2.*
2. *Démontrer que $\forall\ x \in [1, 2],\ |f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x - x_0|$*

2.2 Primitives d'une fonction numérique

2.2.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction numérique F définie et dérivable sur I tel que $\forall\ x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Exemple
Soit $f : x \longmapsto 2x + 3$.
On sait que $(x^2 + 3x)' = 2x + 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$ *donc la fonction* $F : x \longmapsto x^2 + 3x$ *est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$.

2.2.2 Théorèmes

2.2.2.1 Théorème 1

Nous admettons le resultat suivant :
Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

2.2.2.2 Théorème 2

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f admet une primitive F sur I alors elle en admet une infinité. L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions définies sur I par $x \longmapsto F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

2.2.2.3 Théorème 3

Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x_0 de I et pour tout réel y_0 il existe une primitive et une seule de f sur I qui vaut y_0 en x_0.

Exemple *Soit*

$$f : x \longmapsto 2x + 3$$

.
Déterminer la primitive de f *qui vaut 4 en -1.*

2.2.3 Primitives de quelques fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F
$x \longmapsto 0$	$x \longmapsto k,\ k \in \mathbb{R}$
$x \longmapsto a$	$x \longmapsto ax + k,\ k \in \mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 + k$
$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + k$
$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \longmapsto \sqrt{x} + k$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + k$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + k$
$x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	$x \longmapsto -\frac{1}{x} + k$

2.2.4 Opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

1. $u + v$ est une primitive de $u' + v'$.
2. $\forall\ a \in \mathbb{R},\ (au)$ est une primitive de au'
3. uv est une primitive de $u'v + v'u$.
4. Si $\forall\ v \neq 0,\ \frac{1}{v}$ est une primitive de -$\frac{v'}{v^2}$

5. Si $\forall\ v \neq 0,\ \dfrac{u}{v}$ est une primitive de $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
6. Si $\forall\ n \in \mathbb{Z}^*,\ u^n$ est une primitive de $nu'u^{n-1}$

   NB : $\forall\ n \neq -1,\ \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $u'u^n$.
7. Si u est dérivable sur I et v dérivable sur $u(I)$ alors (vou) est une primitive de $u' \times v'ou$.

Exemples

1. *Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis déterminer l'ensemble des primitives de la fonction.*
   (a) $f : x \longmapsto x^3 - 2x + 1$
   (b) $g : x \longmapsto \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
   (c) $h : x \longmapsto \sin 3x$
   (d) $i : x \longmapsto \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$
   (e) $k : x \longmapsto \sin^3 x$
2. *Déterminer la primitive sur I de chacune des fonctions ci dessous qui vaut y_0 en x_0.*
   (a) $f : x \longmapsto x - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ I = \mathbb{R}_+^*,\ x_0 = 1,\ y_0 = 0$
   (b) $g : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right),\ I = \mathbb{R},\ x_0 = 0,\ y_0 = 0.$

3

Fonction puissance d'exposant rationnel

3.1 Rappel : puissance d'exposant entier d'un réel

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, a \in \mathbb{R}^*,\ a^0 = 1$
- Si $n \neq 0,\ a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$.
- Si $a \neq 0,\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

.

Règles de calcul

$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, p \in \mathbb{Z},\ \forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, b \in \mathbb{R}$.

1. $a^n \times a^p = a^{n+p}$
2. $(a^n)^p = a^{np}$
3. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
4. Si $b \neq 0,\ \left(\dfrac{1}{b}\right)^n = \dfrac{1}{b^n},\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ \dfrac{b^n}{b^p} = b^{n-p}$

3.2 Racine n-ième d'un réel positif

3.2.1 Théorème et définition

Soit n un entier naturel non nul.
Pour tout réel positif x, il existe un réel positif et un seul réel y tel que $y^n = x$. Ce réel s'appelle la racine n-ième de x et se note $\sqrt[n]{x}$.

$$y = \sqrt[n]{x} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y^n = x \end{cases}$$

Cas particulier :

– Si $n = 1$, $\sqrt[1]{x}$ se note x.
– Si $n = 2$, $\sqrt[2]{x}$ se note $\sqrt{x}$ et se lit racine carrée de x.
– Si $n = 3$, $\sqrt[3]{x}$ se lit racine cubique de x.

Exemple
$2^3 = 8$ *donc* $\sqrt[3]{8} = 2$
$3^5 = 243$ *donc* $\sqrt[5]{243} = 3$

3.2.2 Règles de calcul

Soient a et b deux réels positifs, n et p deux entires naturels non nuls.

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$
2. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
4. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
5. Si $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Exemple
Calculer $\sqrt[6]{8}$.

3.3 Puissance d'exposant rationnel d'un réel

3.3.1 Définition

Soient $x \geq 0$ et r un rationnel positif.

- Si $r = 0$ alors $x^0 = 1$
- Si $r > 0$ alors $r = \dfrac{p}{n}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$

On pose :

$$x^r = x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$$

Cas particulier :

1. Si $n = 1$ alors $n = p$, $p \in \mathbb{N}^*$
2. Si $n \neq 1$ et $p = 1$ alors $r = \dfrac{1}{n}$

$$x^r = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

.

3. Si $x > 0$, r un rationnel positif. On pose $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$

Exemple
Calculer $8^{-\frac{1}{3}}$ *et* $8^{-\frac{3}{2}}$

3.3.2 Règles de calcul

Soient a et b deux réels positifs, r et r' deux rationnels.

1. $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$
2. $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

3. $a^r \times b^r = (a \times b)^r$
4. Si $b \neq 0$, $\left(\dfrac{1}{b}\right)^r = \dfrac{1}{b^r}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$, $\dfrac{b^r}{b^{r'}} = b^{r-r'}$

Exemple

Ecrire en fonction d'une puissance rationnelle de 2 et d'une puissance rationnelle de 3.

$$A = \frac{\sqrt[3]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{27} \times \sqrt{6}}$$

Théorèmes

On démontre les résultats suivants :

1. Pour tout rationnel r non nul, la fonction $x \longmapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x^r)' = rx^{r-1}$.
2. Si u est une fonction numérique définie positive non nul, dérivable sur un intervalle I alors pour tout rationnel non nul r, la fonction $x \longmapsto u^r(x)$ est définie et dérivable sur I .
   $\forall\ x \in I,\ (u^r(x))' = ru'(x)u^{r-1}(x)$.
3. Si u est une fonction numérique définie positive non nul, dérivable sur un intervalle I alors pour tout rationnel r non nul et distinct de -1 alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ est une primitive sur I de la fonction $x \longmapsto u'(x)u^r(x)$

Exemple

Soit la fonction f définie de $]1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$.

$\forall\ x > 1,\ \dfrac{x^3+1}{x^3-1} > 0$ *; f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-2x^2}{(x^3-1)^2} \times \left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{-\frac{2}{3}}$.*
$f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$.

4 Fonction logarithme Neperien

4.1 Définition

On appelle fonction logarithme Neperien la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

On la note ln. $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $x \longmapsto \ln(x)$ telle que : $\begin{cases} [\ln(x)]' = \frac{1}{x} \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln(x)$ se lit logarithme Neperien de x.

Remarque :

$\ln(x)$ se note $\ln x$.

4.2 Propriétés

4.2.1 Propriété fondamentale

Soit $a > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ $[\ln(ax)]' = \frac{1}{x}$.

Preuve :

on pose $u(x) = ax$ et $v(x) = \ln x$.

On a : $\ln ax = vou(x)$ donc $[\ln ax]' = (vou(x))' = \frac{1}{x}$.

4.2.2 Propriétés algébriques

1. On sait que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln ax)' = \frac{1}{x}$.
   On en déduit : $\ln ax = \ln x + k$, $\forall\ k \in \mathbb{R}_+^*$.
   Donc pour $x = 1$, $\ln a = \ln 1 + k \Longrightarrow k = \ln a$.
   $\ln ax = \ln x + \ln a$

$$\forall\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ b \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$$

.

2.
$$\forall\ a > 0,\ \boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$$
.

3.
$$\forall\ a > 0,\ \forall\ b > 0,\ \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$$

4.
$$\forall\ a > 0,\ \forall\ r \in \mathbb{Q},\ \boxed{\ln a^r = r \ln a}$$
.

Remarque :

$\forall\ a > 0,\ \ln\sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}$$

.

4.2.3 Logarithme et ordre

On sait que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow (\ln x)' > 0$. La fonction $x \longmapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit $\forall\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\ln a < \ln b \Longleftrightarrow a < b}$$

$$\boxed{\ln a > \ln b \Longleftrightarrow a > b}$$

$$\boxed{\ln a = \ln b \Longleftrightarrow a = b}$$

Exemples

1. *On donne* $\ln 2 = 0,69$: $\ln 3 = 1,09$: $\ln 5 = 1,61$.
   Calculer $\ln 8,\ \ln\dfrac{1}{12},\ \ln\dfrac{200}{81}$.
2. *Déterminer* D_f *pour :*
   (a) $f(x) = \ln(3x+2)$
   (b) $f(x) = \ln(2x^2 - x - 1)$
   (c) $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-3}$
   (d) $f(x) = \ln(\ln x)$
3. *Resoudre dans* $\mathbb{R}$ *:*
   (a) $\ln(2x-2) + \ln(x+2) = 3\ln 2$
   (b) $\ln(x+2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3)$
   (c) $\ln x + \ln(x+2) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$

4.3 Etude de la fonction $x \longmapsto \ln x$

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.

$*$ $D_f=]0,+\infty[$.

$*$ $\forall\ x \in]0,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{1}{x}$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$*$ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$.

Preuve :

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln 2^n=+\infty$.
Ceci se traduit par $\forall\ A\in\mathbb{R}^*,\ \exists\ n_0>0,\ \forall\ n\geq n_0,\ \ln 2^n>A$.
Si $x>2^{n_0}$ alors $\ln x>\ln 2^{n_0}$ donc $\ln x>A$.
Il est toujours possible de rendre $\ln x$ aussi grand que l'on veut pourvu que x soit aussi grand que l'on veut donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\ln x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x)=\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}\ln\dfrac{1}{t}=\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}-\ln t=-\infty$.

$*$ **Tableau de variation**

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Remarque :

f continue , strictement croissante sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$ donc f est bijective de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$. $1\in]-\infty,+\infty[$ donc il existe un réel unique x_0 strictement positif tel que $\ln x_0=1$. On demontre qu'une valeur approchée de x_0 est $2,71828$. Sa valeur exacte se note e. $\ln e=1,\ e\simeq 2,71828$.

$*$ **Asymptote**

$\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

La courbe admet-elle une asymptote oblique ?
On étudie $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Soit g la fonction $x\longmapsto \ln x-x+1$ et $\forall\ x>0$ $g'(x)=\dfrac{1-x}{x}$. $g'(x)$ a le signe de $1-x$.

- $g'(x)\leq 0 \Longleftrightarrow 0<x\leq 1$
- $g'(x)\geq 0 \Longleftrightarrow x\geq 1$
- $g(1)=0$

$\forall\ x \in]0,1],\ \ g(x) \leq g(1)$ i.e $g(x) \leq 0$.
$\forall\ x \in]1,+\infty[,\ \ g(x) \leq g(1)$ i.e $g(x) \leq 0$.
$\forall\ x > 0\ g(x) \leq 0$ i.e $\ln x - x + 1 \leq 0$ ou $\ln x \leq x - 1$.
On en déduit que $\forall x > 0,\ \ln x < x$ et par suite : $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x} \Longrightarrow \ln x < 2\sqrt{x}$.
$\forall\ x > 0$; $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $\forall\ x > 1$; $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
On dit alors que la courbe de f admet une branche parabolique de direction (Ox).

* **Tangente au point d'abscisse 1**
  $y = f(1) + f'(1)(x-1) \ \Longrightarrow y = x - 1$
* **Tangente au point d'abscisse e**
  $y = f(e) + f'(e)(x-e) \ \Longrightarrow y = \dfrac{x}{e}$.
* **Tracé de la courbe**

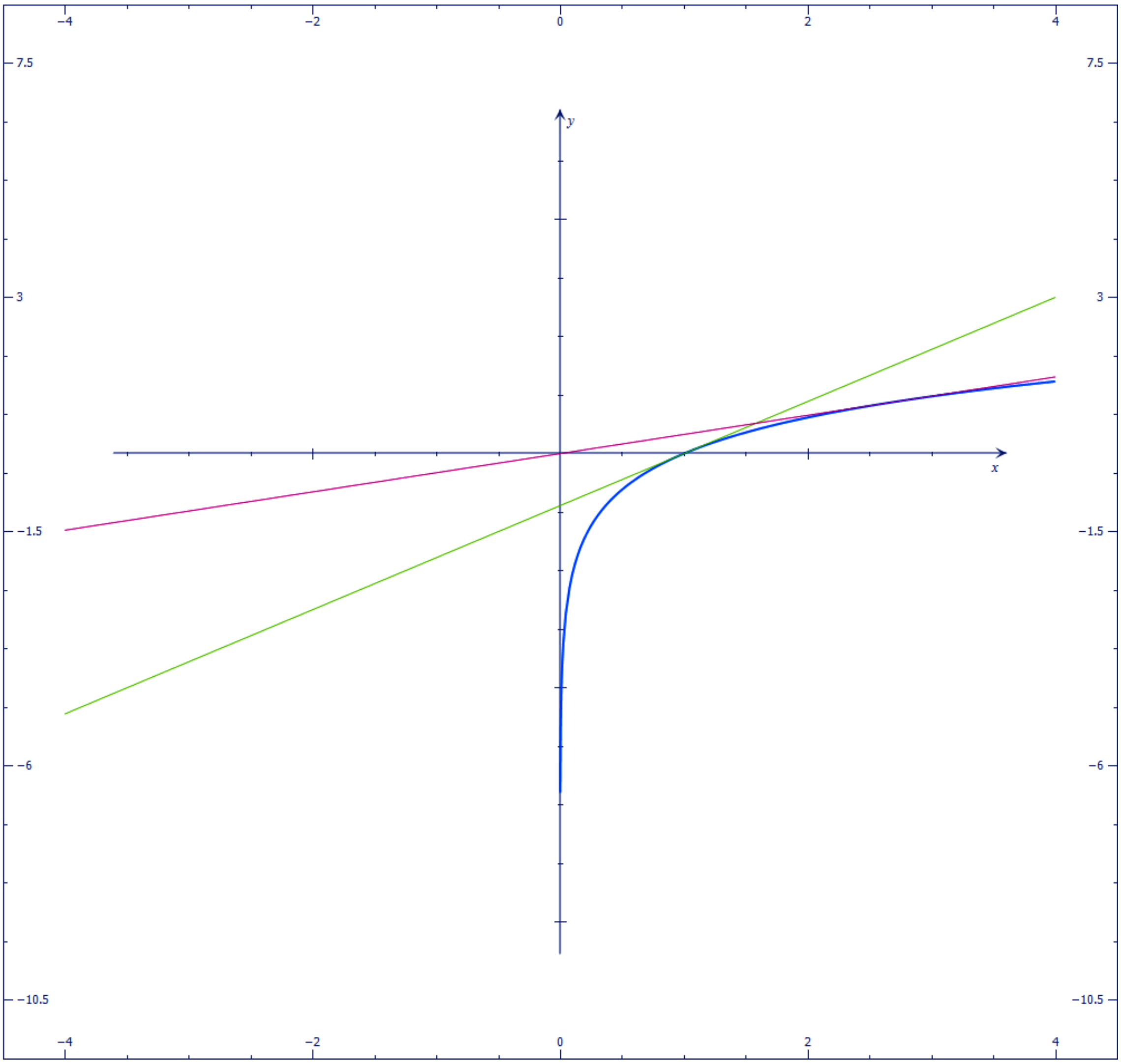


FIGURE 4.1 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \ln x$

* Autres limites

– $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x \ln x = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{-\ln t}{t} = 0$
– $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$ car f est dérivable en 1 avec $f(x) = \ln x$.

Récapitulatif

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \ln x = 0$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

4.4 Autres résultats

Théorème

Soit u une fonction numérique définie, dérivable non nul sur un intervalle I.
Sur tout intervalle J de I sur lequel u ne s'annule pas, la fonction $x \longmapsto \ln|u(x)|$ est définie et dérivable et $\forall\ x \in J$ $[\ln|u(x)|]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle la dérivée logarithmique de $u(x)$.

Conséquence

Si u est une fonction numérique définie , dérivable et s'annulant pas sur un intervalle I alors la fonction $x \longmapsto \ln|u(x)|$ est une primitive sur I de la fonction $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

4.5 Logarithme décimale

4.5.1 Définition

On appelle logarithme décimal d'un réel strictement positif x, le réel $\dfrac{\ln x}{\ln 10}$. On le note $\log x$.

$$\boxed{\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}}$$

4.5.2 propriété

1. $\forall\ a > 0,\ \forall\ b > 0,$ $\boxed{\log ab = \log a + \log b}$.
2. $\forall\ a > 0,$ $\boxed{\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log a}$.
3. $\forall\ a > 0,\ \forall\ b > 0,$ $\boxed{\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b}$
4. $\forall\ a > 0,\ r \in \mathbb{Q}_*^+,$ $\boxed{\log a^r = r \log a}$

$$(logx)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

5

Fonction exponentielle, puissance d'exposants réels

5.1 Fonction exponentielle

5.1.1 Définition

On appelle fonction exponentielle la bijection réciproque de la fonction logarithme néperien. on la note exp. Elle est définie de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$ par $\forall\ \mathbb{R},\ \forall\ y \in \mathbb{R},\ \exp(x) = y \Longleftrightarrow x = \ln y$.
$\exp(x)$ se lit exponentielle de x.
On a $\ln 1 = 0$ donc $\exp(0) = 1$; $\ln e = 1$ donc $\exp(1) = e$

5.1.2 propriétés

Soient a et b deux réels, r un rationnel.
Soit $a' = \exp(a),\ b' = \exp(b) \Longrightarrow a + b = \ln a' + \ln b' = \ln a'b'$. On en déduit que $\exp(a + b) = a'b'$.

1. $$\boxed{\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)}$$
2. $$\boxed{\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}}$$
3. $$\boxed{\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}}$$
4. $$\boxed{\exp(ra) = (\exp(a))^r}$$
   .
   Si $r = 0$ alors $\exp(ra) = 1 = e^0$.

Par convention , on étend cette égalité à $\exp(x)$. Pour tout réel x en posant $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x$ (et on lit e puissance x).
Avec cette notation : au niveau de la définition $e :]0;+\infty[\longrightarrow]0;+\infty[\quad x \longmapsto e^x$ tel que
$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ y \in \mathbb{R}_*^+;\ e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y$.
$\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \forall\ r$ on a :

1. $$\boxed{e^{(a+b)} = e^a \times e^b}$$

2.
$$\boxed{e^{-a} = \frac{1}{e^a}}$$

3.
$$\boxed{e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b}}$$

4.
$$\boxed{e^(ra) = (e^a)^r}$$

5.1.3 Etude de la fonction $x \longmapsto e^x$

Soit f la fonction $x \longmapsto e^x$.

* Domaine de définition
  $D_f = \mathbb{R}$.
* Dérivée
  La fonction $x \longmapsto \ln x$ est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que sa réciproque $x \longmapsto e^x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $g : x \longmapsto \ln x$ alors $f = g^{-1}$.
  $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x)$.
* Sens de variation
  $\boxed{(e^x)' = e^x}$ on en déduit que $\forall\ x > 0,\ f'(x) > 0$ et donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
* Limites
  1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0^+$.
  2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$
* Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

* Branches infinies
  $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à La courbe de f en $-\infty$.
  $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{t}{\ln t} = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{\frac{\ln t}{t}} = +\infty$ en posant $t = e^x$.
  On en déduit que la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction (OJ).

∗ Représentation graphique

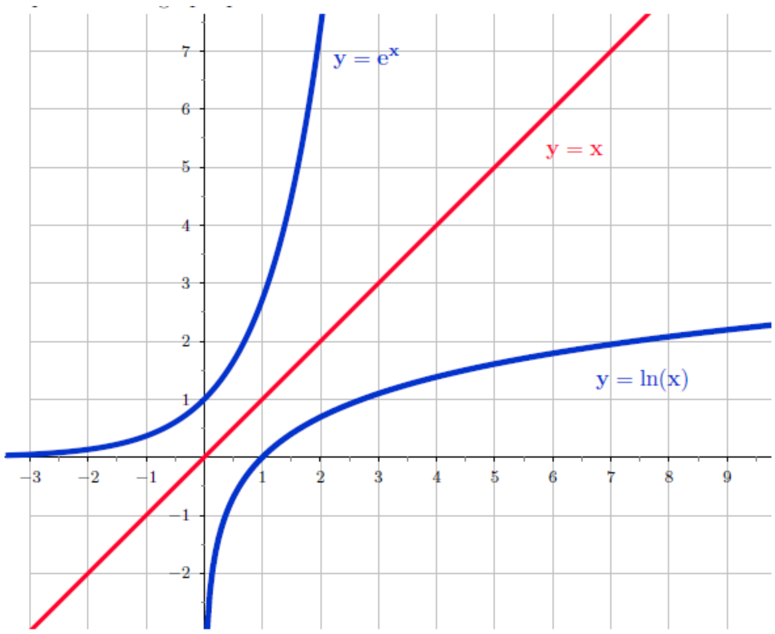


FIGURE 5.1 – Courbe de la fonction e^x et $\ln x$

La courbe de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

5.1.4 Autres limites indéterminés

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = 0, \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Preuve :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} (-t)e^{-t} = 0$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$ avec $f(x) = e^x$

5.1.5 Autres résultats

Théorème
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

1. *La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et $\forall\ x \in I$; $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.*
2. *La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est une primitive sur I de la fonction $u'(x)e^{u(x)}$.*

Exemples

1. *Resoudre dans $\mathbb{R}$:*
   (a) $e^{x-4} = 1$
   (b) $e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$
   (c) $e^{2x+\ln 2} + e^{x+\ln 5} - 3 = 0$

2. *Resoudre dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
   (a) $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} e^{xy} + e^x = 10 \\ (e^x)^{y+1} - 5e^x = 6 \end{cases}$
3. *Trouver une primitive de* f *pour :*
   (a) $f(x) = e^{-x+1}$
   (b) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
   (c) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x + x}$

Exercice

Soit $f : x \longmapsto x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
$(\mathcal{C})$ *est la courbe de* f *dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) *Vérifier que* $\forall\ x \in \mathbb{R}$ *:*
$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$
   (b) *Montrer que* f *est impaire.*
2. *Etudier les variations de* f *sur* $[0, +\infty[$.
3. *Montrer que* $(\mathcal{C})$ *abmet deux asymptotes obliques* (Δ_1) *et* (Δ_2) *et étudier la position de* $(\mathcal{C})$ *par rapport à* (Δ_1) *et à* (Δ_2).
4. (a) *Donner l'équation de la tangente* (T) *à* $(\mathcal{C})$ *au point d'abscisse 0.*
   (b) *Construire* (T), (Δ_1), (Δ_2) *et* $(\mathcal{C})$.
5. *Montrer que l'équation* $f(x) = x$ *admet une solution unique* x_0 *dans* $\mathbb{R}$.
6. *Déterminer une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$.

5.2 Puissance d'exposant rationnel

Soit x un réel strictement positif, α un réel. On appelle puissance de x d'exposant α. Le réel noté x^α définie par $\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln x}}$.

$*$ Dérivé et sens de variation :
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+\ x \longmapsto x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.
- Si $\alpha < 0$ alors $f'(x) < 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ $(\alpha < 0)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $f'(x) > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ $(\alpha > 0)$.

$*$ Limite :
Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} e^{\alpha \ln x} = 0$.
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$*$ Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque :

$\forall\ \alpha > 0;\ 0^\alpha = 0$. f est prolongée par continuité en 0.

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{\alpha-1}$$

Si $0 < \alpha < 1$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = +\infty$.

La courbe de f admet au point $(0;0)$ une demi tangente verticale d'équation $x = 0$.
Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^{\alpha-1} = 0$ donc f est dérivable en 0 et sa courbe admet en $x = 0$ une tangente horizontale d'équation $y = 0$.
Si $\alpha = 1$, $f(x) = x$

$*$ branches infinies

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\alpha-1}$$

Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = +\infty$.
Si $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = 0$. La courbe de f admet une branche parabolique de direction (Ox).

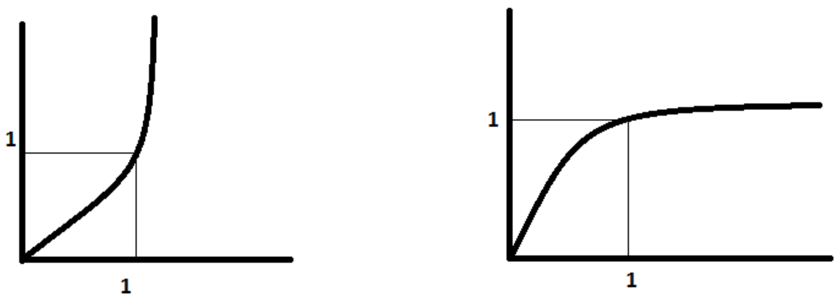


FIGURE 5.2 – Tracé de f lorsque $\alpha > 1$ (à gauche) et pour $0 < \alpha < 1$ (à droite)

Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} e^{\alpha \ln x} = +\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^{\alpha \ln x} = 0$.
La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

6

Nombres complexes

6.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

6.1.1 Définition et notations

Nous admettons qu'il existe un ensemble de nombre noté $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$ et dans lequel sont définies une addition et une multiplication qui prolonge l'addition et la multiplication définie dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ contient en particulier un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
Tout élement de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a+bi$ où a et b sont des réels. Les élements de $\mathbb{C}$ sont appelés des nombres complexes.
Si $z \in \mathbb{C}$ il existe un couple unique (a, b) de réels tel que $z = a + bi$.
$a + bi$ est la forme algébrique de z. Le réel a s'appelle la partie réel de z noté $Re(z)$ et le réel b s'appelle la partie imaginaire de z noté $Im(z)$.
Si $a = 0 \Longrightarrow z = bi$ et on dit que z est un imaginaire pur.

6.1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

6.1.2.1 Egalité dans $\mathbb{C}$

Deux nombres complexes $a + bi$ et $a' + b'i$ sont égaux sssi $a = a'$ et $b = b'$. On note alors $a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.
Cas particulier :
$z = 0 \Longleftrightarrow Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

6.1.2.2 Addition dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes. Par définition $z + z' = a + a' + (b + b')i$

6.1.2.3 Multiplication dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$ deux nombres complexes. Par définition $zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i$.

6.1.2.4 Inverse dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Si $z \neq 0$, il existe un unique complexe z' tel que $zz' = 1$. Le complexe z' s'appelle l'inverse de z et se note $\frac{1}{z}$.
Soit $z' = a' + b'i$ l'inverse de $a + bi$. On a $zz' = 1 \Longleftrightarrow aa' - bb' = 1$ et $ab' + ba' = 0$.

$$z' = \frac{1}{z} = a' + b'i = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \text{ et } \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

,
Si $z = 0 \Longrightarrow z$ n'a pas d'inverse.

6.1.2.5 Quotient dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes. Si $z \neq 0$, le quotient de z par z' est le produit de z par $\frac{1}{z'}$. On le note $\frac{z}{z'}$.

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{aa'}{a'^2+b'^2} + \frac{bb'}{a'^2+b'^2} + \left(\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}\right) i$$

.

6.1.3 Complexe conjugué d'un complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ (z barre) défini par : $\bar{z} = a - bi$. $\boxed{\overline{a+bi} = a - bi}$.

1. $\overline{(\bar{z})} = z$
2. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
3. $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ si $z' \neq 0$

$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow b = 0 \Longleftrightarrow z = \bar{z}$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
Conséquence : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

Remarque :

L'ensemble des complexes non nuls se note $\mathbb{C}^*$.
L'ensemble des complexes imaginaires purs se note $i\mathbb{R}$.

Exemple
Calculer : $(3+4i)^2$, $(2+i)^2 + (1-2i)^2$, i^3, $\frac{1}{1-i}$, $\frac{1+3i}{3+4i} + \frac{7-2i}{3-4i}$

6.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans toute la suite $\mathcal{P}$ désigne le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ qu'on appelle plan complexe.

6.2.1 Point image d'un complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur

6.2.1.1 Définition

Soit z un nombre complexe. Il existe un couple unique (x, y) de réels tel que : $z = x + iy$.
Le point $M(x, y)$ du plan $\mathcal{P}$ s'appelle le point image du complexe z.
Réciproquement, à tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonées (x, y) dans le repère $O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ correspond un complexe unique : $z_m = x + yi$ s'appelle l'affixe du point M noté parfois $aff(M)$.

Pour tout complexe $z = x + iy$ le vecteur $\overrightarrow{t} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ s'appelle le vecteur image de z.
Réciproquement, pour tout vecteur $\overrightarrow{t}(x, y)$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ correspond un complexe unique $z_{\overrightarrow{t}} = x + yi$ et $z_{\overrightarrow{t}}$ s'appelle l'affixe de $\overrightarrow{t}$ noté $aff(\overrightarrow{t})$.

Exemple
L'affixe du point O est $z = 0$.
L'affixe du point $I(1, 0)$ est $z = 1$
L'affixe du point $J(0, 1)$ est $z = i$

$M \in (O, \overrightarrow{u}) \Longleftrightarrow z_m = x,\ x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z_m \in \mathbb{R}$.
L'axe $(O, \overrightarrow{u})$ est appelé l'axe réel.
$M \in (O, \overrightarrow{v}) \Longleftrightarrow z_m = yi,\ y \in \mathbb{R}$
L'axe $(O, \overrightarrow{v})$ est appelé axe imaginaire pur.

6.2.1.2 Propriétés

1. Soient $\overrightarrow{t}$ et $\overrightarrow{t'}$ deux vecteurs $aff(\overrightarrow{t} + \overrightarrow{t'}) = aff(\overrightarrow{t}) + aff(\overrightarrow{t'})$.
2. Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$: $aff(\overrightarrow{MN}) = aff(N) - aff(M)$.
3. I est le milieu de $[MN]$ sssi $aff(I) = \dfrac{aff(M) + aff(N)}{2}$

6.2.2 Module et argument d'un complexe

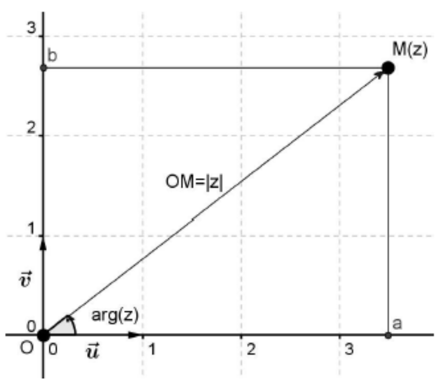
6.2.2.1 Définitions

a) Soit z un nombre complexe, M un point image de z dans $\mathcal{P}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ $(||\overrightarrow{OM}||)$ ou la longueur du segment $[OM]$ noté OM est appelé le module du complexe z noté $|z|$.
$z = a + bi$ alors $M(a, b)$ et $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) Soit z un nombre complexe non nul . M son point image dans $\mathcal{P}$.
On appelle argument de z l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$. Toute mesure en radian de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ s'appelle aussi un argument de z.

Remarque :

Le complexe nul n'a pas d'argument.
Cas particulier : $|i| = |OJ| = 1$ et $\arg i = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
$|1| = ||\overrightarrow{OI}|| = 1$ et $\arg 1 = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OI}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}) = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
On demontre que $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$. $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelé forme trigonométrique de z. On note que $z = [r, \theta]$.

$$z = [r, \theta] \Longleftrightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

.

Remarque :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + bi$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, on a alors $z = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On en déduit que : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$

Exemples

1. *Ecrire $z = 1 - i$ sous forme trigonométrique.*

   On a : $|z| = \sqrt{2}$ *et* $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

   $z = [\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}] \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$

2. *Même question pour* $z = \dfrac{3}{\sqrt{3} - i}$.

   On a : $z = \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right]$.

6.2.2.2 Propriétés relatives au module

Soient z et z' deux nombres complexes .

1. $|\overline{z}| = |z|$.
2. $|zz'| = |z| \times |z'|$.
3. $\forall\ r \in \mathbb{Z},\ |z^r| = |z|^r$.
4. $\forall\ z \neq 0,\ \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
5. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
6. Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe $\left|\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{DC}{AB}$ avec $B \neq A$.

6.2.2.3 Propriétés relatives aux arguments

Soient z et z' deux nombres complexes .

1. $\arg zz' = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
2. $\arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad [2\pi]$
3. $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
4. $\arg z^n = n \arg z \quad [2\pi]$
5. $\arg \bar{z} = -\arg z \quad [2\pi]$

Interprétation géométrique

- Argument de l'affixe d'un vecteur : $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}\,; \overrightarrow{AB})$
- $\arg \dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB})$ avec $C \neq D$.

Ensembles de points

- $z \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \arg z = 0 \quad [\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^{+*} \Longleftrightarrow \arg z = 0 \quad [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^{-*} \Longleftrightarrow \arg z = \pi \quad [2\pi]$
- z est imaginaire pur $\Longleftrightarrow (\arg z = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \quad \text{ou} \quad z = 0)$

Exemples

1. Déterminer et tracer l'ensemble A_i des points M d'affixe z vérifiant une des conditions suivantes :

   (a) A_1 : $(1+i)z \in \mathbb{R}$.

   (b) A_2 : $\arg iz = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

   (c) A_3 : $\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ où $z_A = 2 - i$ et $z_B = -1 + i$.

   (d) A_4 : $\dfrac{z - z_B}{z - z_A} \in \mathbb{R}^{-*}$ où $z_A = 3$ et $z_B = 1 + 2i$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-1}{z+2}$; si $z \neq -2$. Montrer qu'il existe deux points B et C tels que $B' = B$ et $C' = C$.
Soit A le point d'affixe 1 . Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
Montrer que lorsque $M' \in$ au cercle de centre A et de rayon 1 alors M appartient à un ensemble $\mathcal{H}$ que l'on précisera.

6.2.2.4 Formule de Moivre

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ. $z = \cos\theta + i\sin\theta$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$, on sait que $|z^n| = |z|^n = 1$ et $\arg(z^n) = n\arg z = n\theta$. On en déduit que :
$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ d'où :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

6.2.2.5 Notation exponentielle d'un nombre complexe

On pose pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Le complexe non nul z, de module $|z| = r$ et d'argument θ est mis sous forme exponentielle lorsque l'on écrit : $z = re^{i\theta}$ où : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Ainsi $e^{i\theta}$ désigne un nombre complexe de module 1. Réciproquement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous cette forme.

Rappel :

e est le nombre tel que $\ln e = 1$.

Exemple
Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle le complexe suivant :

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{2006}$$

6.2.2.6 Formule d'Euler

Soit θ un réel : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ d'où :
$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ donc

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$$

.
$2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ donc

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

6.2.2.7 Application à la linéarisation

Exemple

Soit x un réel :
$*$ $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$.
$*$ $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}-3(e^{ix}-e^{-ix})}{-8i} = \frac{2i\sin 3x - 3\times 2i\sin x}{-8i} = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}$

Passer de $\cos^2 x$ à $\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$ s'appelle linéariser $\cos^2 x$.

Passer de $\sin^3 x$ à $\frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}$ s'appelle linéariser $\sin^3 x$.

6.2.2.8 Expression de $\sin nx$ et $\cos nx$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$

Exemple

$$\begin{aligned}
(\cos x + i\sin x)^3 &= \cos 3x + i\sin 3x \textit{ (formule de Moivre)} \\
&= \cos^3 x + 3\cos^2 x \times i\sin x + 3\cos x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x \\ \sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \end{cases}$$

On en déduit que : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ *et* $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$

6.3 Interprétation géométrique d'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

On considère la plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. A toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z associe le complexe z' on associe l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M image de z associe le point M' image de z' dans $\mathcal{C}$.

6.3.1 Application $z \longmapsto z + a,\ a \in \mathbb{C}$

Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur image de a. $\overrightarrow{OM'}$ est le vecteur image de z'. $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.

$$z' = z + a \Longleftrightarrow z' - z = a \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}.$$

On en déduit que l'application $M \longmapsto M'$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

6.3.2 Application $z \longmapsto z' = \bar{z}$

Soit $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$.

$$z' = \bar{z} \Leftrightarrow x' + iy' = x - iy \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow M' = S_{(O,\overrightarrow{u})}(M)$$

L'application $M \longmapsto M'$ est donc la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel (absisse).

6.3.3 Application $z \longmapsto z' = az,\ a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| = 1$

Si $z \neq 0$; soit $\theta = \arg a$.
$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \arg \dfrac{z'}{z} = \arg \dfrac{az}{z} = \theta$.
$OM' = |z'| = |az| = |a| \times |z| = |z| = OM$.

On a donc $M \longmapsto M'$ tel que $\begin{cases} OM' = OM \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \theta \end{cases}$
On en déduit que l'application $M \longmapsto M'$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure θ.
Si $z = 0,\ z' = a \times 0 = 0$

6.3.4 Application $z \longmapsto z' = \lambda z,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$

$z' = \lambda z \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$. On en déduit que l'application $M \longmapsto M'$ est l'homothétie de centre O et de rapport λ.

Remarque : Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ de point image A. L'application du plan complexe dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a(z - z_0)$ où a est un nombre complexe de module 1 est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\arg a$.

6.4 Equation dans $\mathbb{C}$

6.4.1 Racine n-ième de l'unité

6.4.1.1 Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe z tel que $z^n = 1$.

Exemple

- $(-1)^2 = 1,\ 1^2 = 1 \Longrightarrow$ *1 et -1 sont les racines carrés de l'unité.*
- $1^3 = 1$. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z^3 = 1$.
  Soit $r = |z|$ *et* $\theta = \arg z \Longrightarrow z = [r^3, 3\theta] = 1 = [1, 0]$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} r^3 = 1, \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$r \in \mathbb{R}_+^*,\ r^3 = 1 \Longleftrightarrow r = 1$ *et* $3\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\star$ *Si* $k = 0,\ \theta = 0$

$\star$ *Si* $k = 1,\ \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$\star$ *Si* $k = 0,\ \theta = \dfrac{4\pi}{3}$ *mais* $\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi$

$\star$ *Si* $k = -1,\ \theta = -\dfrac{2\pi}{3}$

$$z^3 = 1 \Longleftrightarrow z = [1, 0] \text{ ou } z = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } z = \left[1, -\frac{2\pi}{3}\right].$$

$z = [1, 0] \Longleftrightarrow z = 1$

$z = \left[1, \dfrac{2\pi}{3}\right] \Longleftrightarrow z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z = \left[1, -\dfrac{2\pi}{3}\right] \Longleftrightarrow z = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On pose parfois $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Les racines cubiques de l'unité sont alors* $1, j$ *et* $\bar{j}$.

Remarque : *Les points images des racines cubiques sont les sommets d'un triangle équilateral inscrit dans le cercle trigonométrique associé au repère* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

6.4.1.2 Théorème

Soit n un entier naturel non nul, Z un nombre complexe non nul. On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.
Tout nombre complexe non nul Z admet n racine n-ième distincte qui sont les complexes
$z_k = \left[\sqrt[n]{r}; \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right],\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ où $r = |Z|$ et $\theta = \arg Z$.

Exemple
Les racines 6^e *de* $\sqrt{3} + i$.
$\sqrt{3} + i = [2, \frac{\pi}{6}]$.
Les racines 6^e *de* $\sqrt{3} + i$ *sont* $z_k = \left[\sqrt[6]{2}; \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{6}\right],\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Recherche des racines carrées d'un complexe
Soit $Z = a + bi$ et $z = \alpha + \beta i$ tel que $z^2 = Z$.

$$\begin{aligned} z^2 = Z &\Longleftrightarrow (\alpha + \beta i)^2 = a + bi \\ &\Longleftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = a + bi \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a & (1) \\ 2\alpha\beta = b & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$z^2 = Z; |z^2| = |Z| \Longrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2}$.
On a donc

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a & (1) \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (2) \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$(1)+(2) \longrightarrow \alpha^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \text{ d'où } \alpha = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

$$(2)-(1) \longrightarrow \beta^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \text{ d'où } \beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

Exemple
Déterminer les racines carrées de $Z = -5 + 12i$.

Après resolution les racines carrées de Z sont : $2+3i$ et $-2-3i$.

6.4.2 Equation du sécond dégré dans $\mathbb{C}$

Une équation du sécond dégré dans $\mathbb{C}$ est une équation du type $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes fixés avec $a \neq 0$ et z l'inconnue, $z \in \mathbb{C}$.
Resoudre une telle équation c'est déterminer les vecteurs de l'inconnues complexe z pour lesquelles l'égalité est vraie. Chacune de ces valeurs s'apppelle une solution de l'équation.

Résolution :

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\iff a\left[\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)\right]=0 \\ &\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{c}{a}\right]=0 \\ &\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 \end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta \in \mathbb{C}$, soit δ une racine carrée de Δ alors :

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]=0 \\ &\iff a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)=0 \\ &\iff a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)=0 \\ &\iff z=\frac{-b-\delta}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b+\delta}{2a} \end{aligned}$$

Δ s'appelle le discriminant de $az^2 + bz + c$.
Remarque : Si $\Delta = 0$ alors $\delta = 0$.

Exemples

1. *Resoudre dans* $\mathbb{C}$;
$$2z^2 + (3-4i)z + 4 + 7i = 0$$
.
2. *Resoudre dans* $\mathbb{C}$;
$$2z^2 - 10z + 13 = 0$$
.
3. *Resoudre dans* $\mathbb{C}$;
$$\frac{z-1}{z+1} = z + 2$$
.
4. *Resoudre dans* $\mathbb{C}$;
$$(z^2+1)^2 = 1$$
.
5. *Resoudre dans* $\mathbb{C}$;
$$z^2 + z + 1 = 0$$
.

7 Calcul intégral

7.1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé

7.1.1 Définition et notation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie et continue sur I. a et b deux éléments de I. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.
Le réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I s'appelle l'intégrale de a à b de $f(x)dx$. On le note $\int_a^b f(x)\ dx$ et se lit intégrale de a à b de $f(x)dx$ ou somme de a à b de $f(x)dx$.
Remarque : L'existence de primitive de f sur I est justifié par la continuité de f.
Si f et g sont deux primitives de f sur I alors $G(x) = F(x) + k$.
$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$.
Dans la notation $\int_a^b f(x)\ dx$ on peut remplacer x par toute autre lettre sauf a, b, d et f. Pour des raisons pratiques on note $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)}$$

Exemple
Calculer les intégrales suivantes : $\int_1^3 x^3\ dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t\ dt,\ \int_1^{-1} e^x\ dx,\ \int_{-3}^{-4} \frac{1}{x}\ dx$

7.1.2 Théorème

Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I. Pour tout réel a élement de I ; la fonction définie sur I par $x \longmapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.
Soit $G : x \longmapsto \int_a^x f(t)\ dt$.

$G(x) = F(x) - F(a)$ où F est une primitive de f. $G(a) = F(a) - F(a) = 0$.

7.1.2.1 Propriété relatives à l'intervalle d'intégration

Soit f une fonction numérique définie et continue sur I.
Soient a, b et c trois éléments de I.
I_1 : $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

$I_2 : \displaystyle\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$

$I_3 : \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$

Exemple

Calculer : $\displaystyle\int_1^4 |x-2|\ dx$

7.1.2.2 Propriété relative à la fonction intégrée

Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle I, a et b étant deux éléments de I.

F_1 :

$$\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

$F_2 : \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx$$

$F_3 :$ Si $a < b$ et si $f(x) \geq 0,\ \forall\ x \in [a,b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\ dx = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0,\ \forall\ x \in [a,b]$$

$F_4 :$ Si $a < b$ et si $f(x) \leq g(x),\ \forall\ x \in [a,b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

$F_5 :$ Si $a < b$ alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

7.1.2.3 Inégalité de la moyenne

On appelle moyenne de la fonction f sur $[a\,;b]$ le réel : $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

[**Inégalités de la moyenne**] **:** Si f admet un minimum m et un maximum M sur $[a\,;b]$, alors on a l'encadrement :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$$

Autrement dit la moyenne est comprise entre le minimum et le maximum de f : $\quad m \leq \bar{f} \leq M$

7.1.2.4 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions définies, continues et dérivable sur un intervalle I.
On a : $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \Longrightarrow u(x)v'(x) = (uv)'(x) - v(x)u'(x)$.
Finalement, on obtient :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = [u(x)v(x]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\ dx}$$

Exemple

Calculer : $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\ dx,\ \int_1^{e^2} \ln x\ dx$

7.2 Aire et volume

7.2.1 Aire d'une surface plane

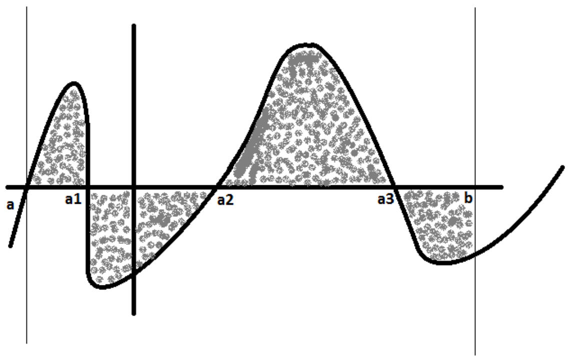
On considère le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Une unité de longueur étant choisie sur chaque axe. Les points de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ sont les sommets d'un rectangle de dimensions $||\overrightarrow{i}||$ et $||\overrightarrow{j}||$. Ce rectangle a pour aire $||\overrightarrow{i}|| \times ||\overrightarrow{j}||$. Cette aire sera appelée l'aire unité.

7.2.1.1 Théorème 1

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I. a et b deux élements de I avec $a < b$. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe representative de f dans le plan muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On désigne par $(\mathcal{D})$ le domaine plan ou surface plane limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
L'aire de $(\mathcal{D})$ est : $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\ dx$ exprimée en unité d'aire.

1er cas : Si $f(x) \geq 0,\ \forall\ x \in [a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b |f(x)|\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$

2^e **cas :** Si $f(x) \leq 0,\ \forall\ x \in [a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b |f(x)|\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$

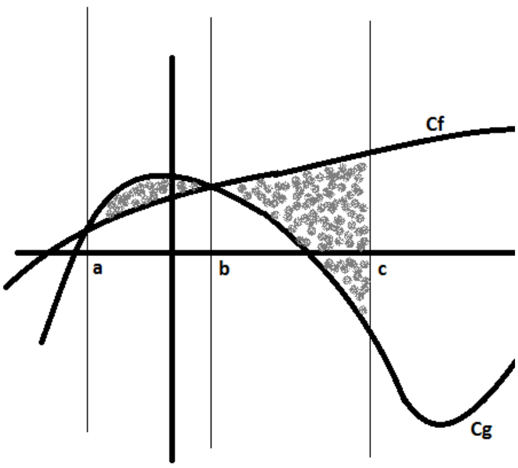


$$\text{On a donc : } \int_a^b |f(x)|\ dx = \int_a^{a_1} f(x)\ dx + \int_{a_1}^{a_2} -f(x)\ dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\ dx + \int_{a_3}^{b} -f(x)\ dx$$

7.2.1.2 Théorème 2

Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un même intervalle I. Soient a et b deux éléments de I avec $a < b$. Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et g dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. L'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx$$



$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \int_a^c (g(x) - f(x))\, dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\, dx$$

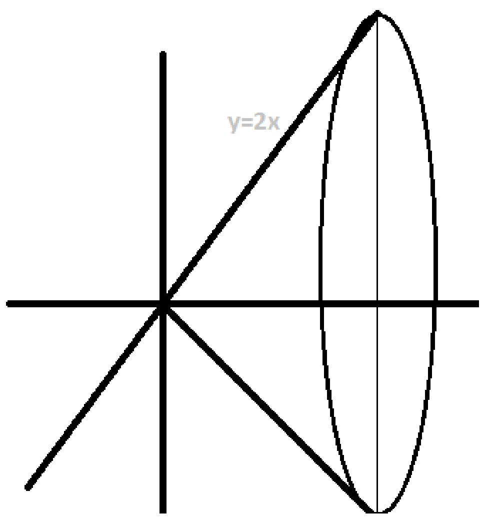
Exemple
Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$. Calculer l'aire du domaine limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$; $x = 3$. Faire une figure.

7.2.2 Volume d'un solide

On considère le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace. Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère le solide engendré par la courbe f, par sa revolution autour de l'axe des abscisses. Pour tout réel $x \in [a, b]$, on désigne par $S(x)$ l'aire du disque de rayon $r(x)$, intersection du solide avec le plan perpendiculaire à l'axe des abcisses au point H d'absisse x. Nous admettons que le volume du solide engendré par la courbe $\mathcal{C}$ dans sa revolution autour de l'axe des abscisses lorsque x varie de a à b est :

$$\int_a^b S(x)\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

Exemple
Soit $f : x \longmapsto 2x$. $\mathcal{C}$ la courbe de f. $(\mathcal{D})$ le domaine plan limité par l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.



Soit S l'aire de $(\mathcal{D})$,

$$S = \int_0^3 2x \ dx = 9 \ u.a$$

On considère le solide engendré par la rotation de f autour de l'axe des abscisses.
Ce solide est un cône de hauteur $h = 3$ et de rayon de base $r = 6$. Le volume de ce cône est :

$$V = \pi \int_0^3 (2x)^2 \ dx = 36\pi \ u.v$$

8

Equations différentielles

8.1 Définitions

Une équation différentielle est une condition réliant une fonction numérique f à ces dérivées successives $(f', f'', \ldots)$.
Resoudre une telle équation différentielle c'est déterminer l'ensemble des fonctions numériques qui satisfont à la condition. Chacune de ces fonctions s'appelle une intégrale de l'équation différentielle ou une solution de cette équation. Nous envisageons que deux types d'équations différentielles :
Les équations du type $af' + bf = 0$ où a et b sont des réels et
Les équations du type $f'' + \omega^2 f = 0$ où ω est un réel constant.

8.2 Résolution

8.2.1 Equation différentielle du 1^{er} ordre

On appelle équation différentielle du 1^{er} ordre, une équation différentielle du type $af'(x) + bf(x) = g(x)$ où f et g sont deux fonctions numériques.
Si $g(x) = 0$, l'éqution dévient $af'(x) + bf(x) = 0$. C'est une équation différentielle du 1^{er} ordre sans sécond membre ou une équation différentielle du 1^{er} homogène. On convient de noter cette équation $ay' + by = 0$.
Si $b = 0$ $ay' + by = 0 \Longleftrightarrow y = 0$ donc $f(x) = 0\ \forall\ x$ et $b \neq 0$.
Si $a \neq 0$, soit f une solution de cette équation :

$$af'(x) + bf(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) = -\frac{b}{a}f(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{b}{a} \Longrightarrow [\ln|f(x)|]' = -\frac{b}{a}x$$

$$\ln|f(x)| = -\frac{b}{a}x + c,\ c \in \mathbb{R} \Longrightarrow |f(x)| = e^{-\frac{b}{a}x+c}$$

$$f(x) = e^{-\frac{b}{a}x+c} \text{ ou } f(x) = -e^{-\frac{b}{a}x+c}$$

$$f(x) = e^{c} \times e^{-\frac{b}{a}x} \text{ ou } f(x) = -e^{c} \times e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$f(x) = ke^{-\frac{b}{a}x},\ k \in \mathbb{R}$$

Théorème
Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ est l'ensemble des fonctions numériques f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-\frac{b}{a}x},\ k \in \mathbb{R}$.
Pour tout couple (x_0, y_0) de réels l'équation $ay' + by = 0$ admet une solution unique f tel que $f(x_0) = y_0$.

Exemples

1. *Resoudre $2y' + 3y = 0$ et trouver la solution qui vaut -1 en 0.*
2. *Resoudre $-\dfrac{1}{2}y' = 2y$ et trouver la solution qui vaut 5 en 2.*

8.2.2 Equation differentielle du sécond ordre

On appelle équation différentielle du sécond ordre une condition réliant une fonction numérique f deux fois dérivable. Sa fonction dérivée séconde f'' et eventuellement sa fonction dérivée première f'.

Théorème
Soit ω un réel. Nous admettons que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions numériques définies par $x \longmapsto a\cos\omega x + b\sin\omega x$ où a et b sont deux réels quelconques.

Remarque :

1. $y'' + \omega^2 y = 0$ a le même sens que $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$
2. $y'' + \omega^2 y = 0$ est appelé équation differentielle du sécond ordre homogène ou sans sécond membre.
3. On peut vérifier que $a\cos\omega x + b\sin\omega x$ est solution de $y'' + \omega^2 y = 0$.
4. La donnée de condition particulière vérifiées par les solutions permet de trouver une solution particulière unique.

Exemple
Trouver la fonction numérique f tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f''(x) + 4f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = -\sqrt{2} \end{cases}$$

9 Suites numériques

9.1 Généralités

9.1.1 Définition, notations-générations

Une suite numérique est une fonction numérique définie de $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} u : I & \longrightarrow & \mathbb{R},\ (u_n)_n \in I \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

Si $I = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0\}$; u_{n_0} = premier terme.

On distingue les suites explicites définies à l'aide de formule explicite : $n \longmapsto f(n)$ où f est une fonction numérique

Exemple
Soit $(u_n)_n; n \geq 1$ *tel que* $u_n = \dfrac{1}{n}$

Les suites de reccurence définies par la donnée des premiers termes et une relation entre un terme (sauf le premier) et ceux qui précedent.

Exemples

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_{n-1} + u_n \end{cases}$$

9.1.2 Monotonie d'une suite

Soit u_0 un entier naturel, u une suite définie sur $I = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0\}$.
$(u_n)_{n\in I}$ est croissante $\Longleftrightarrow \forall\ n \in I,\ u_n \leq u_{n+1}$
$(u_n)_{n\in I}$ est décroissante $\Longleftrightarrow \forall\ n \in I,\ u_n \geq u_{n+1}$
$(u_n)_{n\in I}$ est constante $\Longleftrightarrow \forall\ n \in I,\ u_n = u_{n+1}$

Exemples
Etudier la monotonie des suites suivantes :

1. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

2. $v_n = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n}{n^n}$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n} \end{cases}$ *est décroissnte.*

Indice : *Utiliser le principe de la démonstration par réccurence pour montrer que* $(u_{n+1} < u_n)$

4. Soit la suite $v_n = \sin \frac{1}{n}$

Soit $f : x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$

$\forall\ x \neq 0,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$

$\forall\ x \geq 1,\ 0 < \frac{1}{x} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ *par suite* $\cos \frac{1}{x} > 0$

$f'(x) < 0,\ f$ *est strictement décroissante sur* $[1, +\infty[$ *et donc* $(v_n)_{n \geq 1}$ *est décroissante.*

9.1.3 Suite majorée, minorée, bornée

9.1.3.1 Définition 1

Soit $u_n,\ n \in I$ une suite numérique :

1. u_n est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall\ n \in I,\ u_n \leq M$.
2. u_n est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall\ n \in I,\ u_n \geq m$.
3. u_n est bornée lorsqu'elle à la fois minorée et majorée

Exemple

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$, *telle que* $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ *est minorée par 0 et majorée par 1.*

Théorème

Une suite (u_n) *est bornée sssi* $(|u_n|)$ *est majorée.*

9.1.3.2 Définition 2

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques définie sur une partie I de $\mathbb{N}$.

1. On dit que la suite (v_n) majore la suite (u_n) lorsque $\forall\ n \in I,\ u_n \leq v_n$.
2. On dit que la suite (v_n) minore la suite (u_n) lorsque $\forall\ n \in I,\ u_n \geq v_n$

9.1.4 Les suites périodiques

Soit (u_n) une suite numérique.
S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\ n \in I,\ n + p \in I,\ u_{n+p} = u_n$. On dit que p est une période de (u_n).
La plus pétite période p_0 d'une suite (u_n) s'appelle la période de (u_n).

Exemple

Soit $u_n = \cos \dfrac{2n\pi}{3}$. *Montrer que 3 est une periode de* (u_n).

9.1.5 Représentation graphique d'une suite

On considère le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $(u_n)_{n\in I}$.

1^{er} **cas :** $(u_n)_{n\in I}$ est une suite explicite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique. On se propose de placer les termes $u_n,\ n \in I$ sur les axes $(O, \overrightarrow{i})$ et $(O, \overrightarrow{j})$.
On trace la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'équation $y = f(x)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.
$\forall\ n \in I,\ u_n = f(n)$; ceci permet de placer u_n sur $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. La droite d'équation $y = u_n$ coupe (D) au point de coordonnées (u_n, u_n). Ceci permet de placer u_n sur $(O, \overrightarrow{i})$.

$2^{\text{ème}}$ **cas :** u_n est une suite de reccurence définie par :

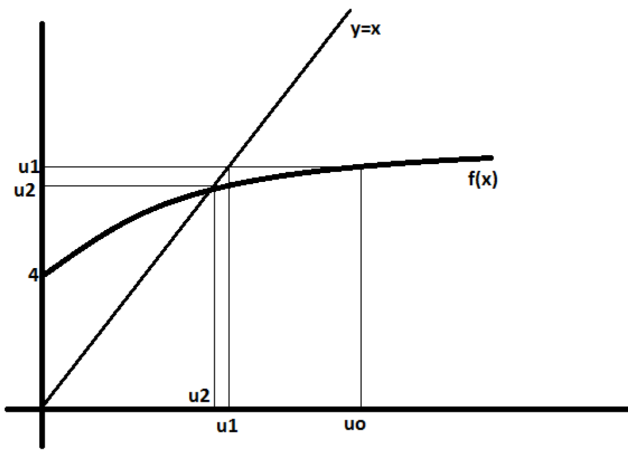
$$\begin{cases} u_{n_0} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall\ n \geq n_0 \end{cases}$$

où f est une fonction numérique.
On trace la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'équation $y = f(x)$ et la droite (D) d'équation $y = x$. On place u_{n_0} sur $(O, \overrightarrow{i})$ ou sur $(O, \overrightarrow{j})$. La droite de l'équation $x = u_{n_0}$ coupe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'ordonnée $f(u_n)$ i.e u_{n+1}. Ce qui permet de placer u_{n_0+1} sur $(O, \overrightarrow{j})$.
La droite d'équation $y = u_{n_0+1}$ coupe la droite (D) au point d'abscisse u_{n_0+1}. Ce qui permet de placer u_{n+1} sur $(O, \overrightarrow{i})$ et en partant de u_{n+1} ; on place successivement $u_{n+2},\ u_{n+3} \ldots$

Exemple

Placer les termes de la suite $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n} \end{cases}$ *sur les axes* $(O, \overrightarrow{i})$ *et* $(O, \overrightarrow{J})$.

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{4 + x}$



9.1.6 Limite d'une suite

9.1.6.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$. On dit que la suite u_n est convergente lorsqu'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$. On dit que u_n converge vers l ou que u_n admet pour limite l. Une suite non convergente est dite divergente.

9.1.6.2 Théorèmes généraux sur les limites

Toutes les règles de calcul de la limite en $+\infty$ d'une fonction numérique s'applique au calcul de la limite d'une suite numérique.

Théorème

1. *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
2. *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Théorème
Soit f une fonction numérique continue sur $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq a;\ a \in \mathbb{R}\}$.
Soit u_n une suite numérique tel que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) est convergente alors sa limite l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemples

1. *Montrer que la suite définie comme suit est convergente et déterminer sa limite.*

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n} \end{cases}$$

2. *Soit $u_n = \sqrt{n^2 + n + 3}$. Montrer que u_n converge vers $\dfrac{1}{2}$.*

9.2 Suites arithmétiques, suites géométriques

9.2.1 Suites arithméthiques

9.2.1.1 Définition

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. On dit que u_n est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que $\forall\ n \geq n_0,\ u_{n+1} = u_n + r$
Le réel r s'appelle la raison de la suite.

9.2.1.2 Propriétés

Soit u_n une suite arithmétique de raison r.

1. $\forall\ p,\ \forall\ n;\quad \boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$.
   Cas particulier : $u_n = u_0 + nr\ \forall\ n \geq 0$ et $u_n = u_1 + (n-1)r\ \forall\ n \geq 1$.
2. u_n est dtrictement croissante (resp strictement décroissante) sssi $r > 0$ (resp $r < 0$).
3. $\forall\ p,\ \forall\ n > p\ \boxed{u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n = \dfrac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}}$

   Cas particulier : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ et $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$
4. $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.
   $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$
   * Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$
   * Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = -\infty$
   * Si $r = 0$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = u_{n_0}$

9.2.1.3 Théorème

Soient a, b et c trois réels. La suite $(a; b; c)$ est arithmétique sssi $a+b+c=3b$. On dit que $(a; b; c)$ forme dans cet ordre une progression arithmétique.

Exemples

1. *Calculer le premier terme d'une suite arithmétique de raison* 3 *sachant que le* $60^{ème}$ *terme est -5.*
2. *Calculer la somme des* 100 1^{er} *naturel impaire.*
3. *Déterminer les trois termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 333 et la somme de leurs carrés est 37205.*

9.2.2 Suites géométriques

9.2.2.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. On dit que u_n est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que $\forall\ n \in I,\ u_{n+1} = qu_n$
Le réel q s'appelle la raison de la suite.

9.2.2.2 Propriétés

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison q.

1. $\forall\ p \in I,\ \forall\ n \in I,$ $\boxed{u_n = q^{n-p}u_p \text{ si } q \neq 0}$

   Cas particulier :
   Si $p=0$ alors $\forall\ n \geq p,\ u_n = q^n u_0$
   Si $p=1$ alors $u_n = q^{n-1}u_1$
2. $*$ Si $q=1$ alors $\forall\ p \in I,\ \forall\ n \geq p$ on a :

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)u_p}$$

   En effet, $\forall\ n \geq p;\ u_n = q^{n-p}u_p = u_p$ car $q=1$.

   $*$ Si $q \neq 1$ alors $\forall\ p \in I,\ \forall\ n \geq p$ on a :

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right) \times u_p}$$

   Cas particulier :
   Si $p=0$, alors $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}u_0$

   Si $p=1$, alors $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{1-q^{n}}{1-q}u_1$
3. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.
   Soit u_0 le premier terme.

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & q^{n+1}u_0 - q^n u_0 \\ & = & q^n u_0(q-1) \\ & = & q^n(q-1)u_0 \end{array}$$

- Si $q < 0$, q^n ne garde pas un signe constant. La suite n'est pas monotone.
- Si $q = 0$ alors $u_n = 0$. La suite est nulle à partir du deuxième terme.
- Si $q = 1$ alors $u_{n+1} = u_n$ donc la suite est constante.
- Si $0 < q < 1$ alors $q^n > 0$ et $q - 1 < 0$. Par conséquent si $u_0 > 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite est décroissante.
  Si $u_0 < 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est croissante.
- Si $q > 1$ alors $q^n(q-1) > 0$ par conséquent :
  - Si $u_0 > 0$ la suite est croissante.
  - Si $u_0 < 0$ la suite est décroissante.

4. (u_n) est convergente sssi $-1 < q \leq 1$. Elle converge alors vers 0.

9.2.2.3 Théorème

Trois réels a, b et c sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique sssi $abc = b^3$

Exemple

Trouver les réels a, b et c sachant qu'ils sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante, $a + b + c = 312$ et $c - a = 192$.

Solution : *On a :* $\begin{cases} a(q^2-1) = 192 \\ a(1+q+q^2) = 312 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1+q^2+q}{q^2-1} = \dfrac{312}{192} = \dfrac{13}{8}$

On obtient $q = 3$ ou $q = -\dfrac{7}{5} \Longrightarrow q = 3$ car la suite est monotone. Finalement $a = 24,\ b = 72$ et $c = 216$.

10 Probabilités

10.1 Rappels des dénombrements

10.1.1 Langage des ensembles

10.1.1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble. On dit que E est fini lorsqu'elle est vide ou lorsque E n'est pas vide et il existe un entier naturel non nul n et une bijection définie de E sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
n s'appelle alors le cardinal de E noté $cardE$

10.1.1.2 Intersection et reunion de deux ensembles finis

Définition Soient A et B deux ensembles finis.
L'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B s'appelle la reunion de A et B.

$$\boxed{x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B}$$

.
L'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B s'appelle l'intersection de A et B et se note $A \cap B$ et se lit A inter B.

$$\boxed{x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B}$$

Théorème

$$\boxed{card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)}$$

Reùarque : Si $A \cap B = \emptyset$. On dit que A et B sont disjoints.

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow card(A \cup B) = card(A) + card(B)}$$

10.1.1.3 Partie d'un ensemble

Soit E un ensemble fini. On appelle partie de E ou sous ensemble de E tout ensemble A vide ou tel que tout élément de A est élément de E. On dit que A est inclus dans E et on note $A \subset E$.

$$\boxed{A \subset E \Longleftrightarrow A = \emptyset, \text{ ou } A \neq 0 \text{ et } \forall\ a \in A,\ a \in E}$$

Si $A \subset E$ alors $card(A) \leq card(E)$ si A et E sont finis.

Si E est fini alors $\mathcal{P}(E)$ est fini.
Si $card(E) = n$ alors $\boxed{card(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$

10.1.1.4 Complémentaire d'un ensemble dans un autre

Soit E un ensemble fini. A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble noté $\mathcal{C}_E^A$ ou lorsqu'il y a pas d'ambiguté $\bar{A}$ dont les éléments appartiennent à E sans appartenir à A. $\mathcal{C}_E^A = \{x \in E;\ x \notin A\}$. $\mathcal{C}_E^A$ est donc un sous ensemble de E.

Remarque :

$*$ $A \cup \mathcal{C}_E^A = E$ et $A \cap \mathcal{C}_E^A = \emptyset$

$*$ $card(\mathcal{C}_E^A) = card(E) - card(A)$

$*$ $\mathcal{C}_E^{\emptyset} = E$ et $\mathcal{C}_E^E = \emptyset$

10.1.1.5 Produit cartésien d'un ensemble fini

1. Soit E et F deux ensembles finis. On appelle produit cartésien de E par F l'ensemble noté $E \times F$ définie par $E \times F = \{(x; y);\ x \in E \text{ et } y \in E\}$.
   $E \times F$ se lit E croix F. Tout élément $(x; y)$ de $E \times F$ s'appelle un couple.
   Remarque :
   $E \times F \neq F \times E$ et $\boxed{card(E \times F) = card(E).card(F)}$
2. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p ensemble fini, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 1$.
   $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p),\ x_p \in E_p\}$.
   $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ s'appelle un p-uplet.
   Si $p = 2$ on dit un couple.
   Si $p = 3$ on dit un triplet.
   Si $p = 4$ on dit un quadriplet.
   Si $E_1 = E_2 = \ldots = E_p = E$ alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = E \times E \times \ldots \times E$.
   On le note $E^p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p),\ x_p \in E\}$.
   Chaque élément de E s'appelle un p-uplet d'éléments de E ou une p-liste d'éléments de E.

$$\boxed{card(E^p) = \underbrace{card(E) \times card(E) \times \ldots \times card(E)}_{p \text{ facteurs}}}$$

.
Si $card(E) = n$ alors $\boxed{card(E^p) = n^p}$

Exemples

1. *Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?*
   Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?
2. *Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?*

Reponse

1. *Un numéro de téléphone à 8 chiffres est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble* $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
   L'ensemble de ces 8-listes est donc de cardinal $(card(\Omega))^8 = 10^8$.
   On peut ainsi former 10^8 *numéros de téléphone à 8 chiffres.*
   Un numéro de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble $\Omega' = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

L'ensemble de ces 10-listes est donc de cardinal $(card(\Omega)')^8 = 9^8 = 43046721$.
On peut ainsi former 43046721 numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0.

2. *Une réponse à ce QCM peut être désignée par une 15-liste de 15 chiffres choisis dans l'ensemble* $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$.
Le nombre de ces 15-listes est donc de cardinal est $(card(\Omega))^{15} = 4^{15}$.

Remarque : Une p-liste d'éléments d'un ensemble à n éléments est le résultat de p tirage d'un élément avec remise.

10.1.2 Arrangement, combinaison

10.1.2.1 Arrangement

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel inferieur ou égal à n. On appelle arrangement de p-élément de E ou p-arrangement des éléments de E tout p-uplet d'élément de E deux à deux distincts.
NB : Un $p-$arrangement des n éléments de E est assimilable à p tirage successif d'un élément parmi les n sans remise.

Théorème

Soient n et p deux entiers naturels tel que $0 \leq p \leq n$. Le nombre d'arrangement de p éléments pris parmi les n éléments est : $n(n-1)(n-3) \times \ldots \times (n-p+1)$. On le note :

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)(n-3) \times \ldots \times (n-p+1)}$$

.
On a $A_n^1 = n$; Par convention $A_n^0 = 1$
Cas particulier : Si $p = n$ alors $A_n^p = A_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \ldots \times 1$.
A_n^n s'appelle le nombre de permutation de n éléments et se note $n!$ (factorielle n).

$$\boxed{n! = A_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \ldots \times 1}$$

Par convention $0! = 1$.

Propriété

Soient n et p deux entiers naturels avec $0 \leq p \leq n$.

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

et

$$n! = n(n-1)!$$

10.1.2.2 Combinaison

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier naturel inferieur ou égale à n.
On appelle combinaison de p éléments pris parmi les n toute partie de E de cardinal p.

Théorème

Soient n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. Le nombre de combinaison de p éléments choisis parmi n éléments est $\frac{A_n^p}{p!}$. On le note C_n^p.

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

Propriétés

1. $C_n^p = C_n^{n-p} \qquad \forall p \leq n$
2. $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \qquad p \leq n-1$

Formule du binôme de Newton

Théorème
Soient a et b deux réels, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}}$$

.
Remarque : *les coeficients C_n^p s'obtiennent à l'aide du triangle arithmétique de Pascal.*

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 10.1 – Triangle arithmétique de Pascal

10.2 Calcul de probabilités

L'objet des probabilités est d'étudier d'un point de vu théorique les phenomèmes aléatoires (phénomènes dont on ne peut pas prévoir le résultat. Ceci dependant du hasard) en évaluant les $\ll$ chances $\gg$ que tel ou tel phénomène se réalise.

10.2.1 Vocabulaire lié aux probabilités

Etant donné un phénomène aléatoire :

1. Tout résultat possible s'appelle une éventualité.

2. L'ensemble des éventualités s'appellent l'univers. On le note Ω sauf indication contraire.
3. Toute partie de l'univers s'appelle un événement.
4. Un événement qui n'a aucune éventualité s'appelle un événement impossible. On le note $\emptyset$.
5. L'univers Ω s'appelle l'univers certain.
6. Un événement qui n'a qu'une seule éventualité s'appelle un événement élémentaire.
7. Si une éventualité a est élément d'un événement A. On dit que a réalise A ou que A est réalisé par a ou que a est favorable à A. On note $a \in A$.
8. Si A est un événement, l'ensemble des éventualités qui ne réalisent pas A s'appelle l'événement contraire de A et se note $\bar{A}$.
9. Si A et B sont deux événements l'ensemble des événtualités qui réalisent A ou B (resp A et B) s'appelle l'événement A ou B (resp A et B) et se note $A \cup B$ (resp $A \cap B$).
10. Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont incompatibles.

10.2.2 Probabilité définie sur un univers

10.2.2.1 Définition

Soit Ω un univers fini d'éventualité associé à une épreuve aléatoire.
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $card(\Omega) = n$.
$\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties(événements) de Ω.
Une probabilité définie sur Ω est toute application p définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0,1]$ qui vérifie les conditions suivantes :

$\mathcal{P}_1$ **:**

$$\sum_{k=1}^{n} p(\{\omega_k\}) = 1$$

$\mathcal{P}_2$ **:** Pour tout événement A,
Si $A = \emptyset$ alors $p(A) = 0$ et si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

$$p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(\{a_i\})$$

$p(A)$ s'appelle la probabilité de A.

Exemple
On lance un dé cubique dont les faces sont numerotées 1,2,3,4,5 et 6. Après immobilisation du dé, on lit le numéro superieur porté par la face supérieur du dé. Le dé est truqué de tel sorte que les numeros paires ont la même chance d'apparaître, les numeros impaires ont la même chance d'apparaître mais apparaissent deux fois moins vite que les numeros paires. Quelle est la probabilité que le numero apparu sur la face superieure est le 2 ? soit le 5 ? soit un numero paire ?

Solution : $p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\}) = x$
$p(\{1\}) = p(\{3\}) = p(\{5\}) = \frac{1}{2}x$
On a :

$$\begin{aligned} p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) &= 1 \\ \frac{9}{2}x &= 1 \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

La probabilité que le numero apparu soit 2 est $\frac{2}{9}$
La probabilité que le numero apparu soit 5 est $\frac{1}{9}$
Soit A l'événement : ≪ Le numero apparu est paire.≫
$A = \{2, 4, 6\}$
$p(A) + p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{2}{3}$

Cas d'équiprobabilité
Soit Ω un univers fini d'éventualité associé à une épreuve aléatoire.
Deux événements A et B sont dits équiprobables lorsqu'ils ont la même probabilité.
On dit qu'il y a équiprobabilité sur Ω lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Conséquence de l'équiprobabilité
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. S'il y a équiprobabilité sur Ω alors $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = \ldots = p(\{\omega_n\})$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} p(\{\omega_i\}) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x = 1 \quad \text{i.e} \quad nx = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{n}$$

.
Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ alors :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

.

$$\boxed{p(A) = \frac{k}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$$

Remarque :
Les expressions du genre : pièce parfaite, pièce non truqué, dé parfait, dé non pipé, cartes bien battues, objets ou boules indiscernables au toucher, tirage au hasard traduisent l'équiprobabilité.

Exemples

1. *Si on jette un dé parfait à 6 faces. La probabilité d'apparition d'une face est* $\frac{1}{6}$.
2. *Si on lance une pièce parfaite à pile ou face la probabilité d'obtenir pile est* $\frac{1}{2}$.
3. *Une urne contient trois boules rouges et quatres boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité des événements suivants :*
   (a) *A =≪ les trois boules tirées sont blanches ≫.*
   (b) *B =≪ les trois boules tirées sont de la même couleur ≫.*

Solution : *Soit Ω l'univers associée à ce tirage, les boules étant indiscernables au toucher, il y a équiprobabilité des tirages.*

$$\forall\ A \subset \Omega;\ p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

.
Chaque éventualité est un ensemble de trois boules tirées simultanément parmi 7 donc $card(\Omega) = C_7^3 = 35$.
$A =\ll$ *les trois boules tirées sont blanches* $\gg$. *A est l'ensemble des tirages simultanés de 3 boules blanches.* $card(A) = C_4^3 = 4$ *alors* $p(A) = \frac{4}{35}$.
$B =\ll$ *les trois boules tirées sont de la même couleur* $\gg$.
$card(B) = C_3^3 + C_4^3 = 5$ *donc* $p(B) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

10.2.2.2 Propriétés

Soit Ω un univers fini d'éventualité. p une probabilité sur Ω.

1. $p(\emptyset) = 0$
2. $p(\Omega) = 1$
3. $\forall\ A \subset \Omega,\ 0 \leq p(A) \leq 1$
4. $\forall\ A \subset \Omega,\ \forall\ B \subset \Omega,\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
   Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

10.2.3 Probabilités conditionnelles

Exemple
On tire une carte d'un jeu de 32 cartes bien battues.

1. (a) *Décrire l'univers Ω des résultats possibles.*
   (b) *Quelle est la probabilité de l'événement R :$\ll$ La carte tirée est un roi$\gg$. On notera cette probabilité $p(R)$.*
   (c) *Quelle est la probabilité $p(T)$ de l'événement T :$\ll$ La carte tirée est un trêfle ?*
   (d) *Quel est l'événement R et T $(R \cap T)$? Calculer sa probabilté noté $p(R \cap T)$.*
2. *On arrive à savoir avant de découvrir la carte tirée : il s'agit d'un trêfle.*
   (a) *Décrire alors l'univers Ω' des résultats possibles.*
   (b) *L'événement $\ll$La carte tirée est un roi$\gg$ de l'univers Ω' s'appelle alors l'événement sachant qu'elle est un trêfle et se note R/T (se lit R sachant T).*
   Calculer $p(R/T)$ et la comparer à $\frac{p(R \cap T)}{p(T)}$
3. *Définir l'événement T/R puis calculer $p(T/R)$ et la comparer à* $\frac{p(T \cap R)}{p(R)}$

Solution : *Composition d'un jeu de 32 cartes : 8 trêfles, 8 carreaux, 8 coeurs, 8 piques.*

1. (a) *Ω est l'ensemble des 32 cartes.*
   (b) *Dans le jeu, il y a 4 rois.* $card(R) = 4$ *donc* $p(R) = \frac{1}{8}$.
   (c) *Dans le jeu, il y a 8 trêfles.* $card(T) = 8$ *donc* $p(T) = \frac{1}{4}$.

(d) $R \cap T$:≪*La carte tirée est un roi et un trêfle* ≫ *donc :*
$R \cap T$:≪*La carte tirée est le roi de trêfle*≫ *et* $p(R \cap T) = \dfrac{1}{32}$.

2. (a) Ω' *est l'ensemble des tirages d'une carte parmi les 8 trêfles.* $card(\Omega') = 8$

(b) $p(R/T) = \dfrac{1}{8}$
$\dfrac{p(R/T)}{p(T)} = \dfrac{1}{8}$

$$\boxed{p(R/T) = \frac{p(R \cap T)}{p(T)}}$$

3. T/R *est l'événement :* ≪*La carte tirée est un trêfle sachant que c'est un roi.* ≫
$p(T/R) = \dfrac{1}{4}$ *et* $\dfrac{p(T \cap R)}{p(R)} = \dfrac{1}{4}$

$$\boxed{p(T/R) = \frac{p(T \cap R)}{p(R)}}$$

10.2.3.1 Définition

Soit Ω un univers fini d'éventualités. p une probabilité sur Ω, B un événement de Ω tel que $p(B) \neq 0$. Soit A un événement quelconque.
La probabilité de A lorsque l'on sait que l'événement B est réalisé s'appelle la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé. On la note $p(A/B)$ ou $p_B(A)$.

$$\boxed{p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

10.2.3.2 Evénements indépendants

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont dits indépendants lorsque $p(A/B) = p(A)$ ou $p(B/A) = p(B)$.
A et B sont indépendants sssi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
Remarque : L'événement impossible est indépendant de tout autre événement.

10.2.3.3 Formules des probabilités totales

Partition d'un univers
Soit Ω un univers fini d'éventualités. Des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω lorsqu'aucun d'eux n'est impossible, lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles leur reunion égale à Ω.

Théorème
Soit Ω un univers fini d'éventualités. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ des événements qui forment une partition de Ω. Pour tout événement A,

$$\boxed{p(A) = p(A/B_1) \times p(B_1) + p(A/B_2) \times p(B_2) + \ldots + p(A/B_n) \times p(B_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A/B_i) \times p(B_i)}$$

Exemple
On dispose de deux urnes U *et* V. *L'urne* U *contient deux boules rouges et deux boules noires, l'urne*

V contient 3 boules rouges et une boule noire. Toutes les boules contenues dans chaque urne sont indiscernables au toucher.
Un joueur lance un dé parfait à 6 faces numérotées 1 ;2 ;3 ;4 ;5 et 6.
Si le numero porté par la face superieur du dé est un multiple de 3, le joueur tire une boule dans l'urne U. Sinon il tire une boule dans l'urne V.
Calculer la probabilité que la boule tirée soit rouge.
Soit B_1 :≪La boule est tirée dans U ≫ et B_2 :≪La boule est tirée dans V ≫

Solution : *Soit Ω l'univers associé aux tirages. B_1 et B_2 forment une partition de Ω.*
Soit R :≪La boule tirée est rouge ≫
$p(A) = p(R/B_1) \times p(B_1) + p(R/B_2) \times p(B_2) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

10.2.4 Schéma de Bernouilli

10.2.4.1 Définition

On appelle epreuve de Bernouilli toute experience aléatoire qui n'a que deux événtualités et deux seuleument.
Exemple : Le jet d'une pièce à pile ou face. La naissance d'un enfant garçon ou fille. Résultat d'un examen.

10.2.4.2 Théorème

Soit n un entier naturel non nul. On considère une épreuve de Bernouilli dont les éventualités sont S et $E(E = \bar{S})$ de probabilité p et q $(p = 1 - q)$.
On considère l'experience aléatoire qui consiste à éffectuer n fois de suite la dite épreuve de Bernouilli de tel manière que les probabilités p et q restent invariables au cours de l'experience.
Pour tout entier naturel $k \leq n$ l'événement ≪obtenir k fois l'issue S au bout des n répétition ≫ a pour probabilité $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

Exemple
Une urne contient trois boules rouges et une boule noire. On considère l'experience suivante :
On tire une boule de l'urne. On note sa couleur puis on la remet dans l'urne et on effectue un autre tirage dans les même conditions. On suppose l'équiprobabilié des tirages.
Quelle est la probabilité de tirer exactement trois fois une boule noire au bout de 7 tirages.

Solution :
A chaque tirage la boule est soit noire soit non noire.
Chaque tirage est une épreuve de Bernouilli.
Soit S : ≪la boule tirée est noire≫. On a $p(S) = \dfrac{1}{4}$.
L'experience consiste à éffectuer 7 tirages est un schéma de Bernouilli. La probabilité de tirer exactement trois fois une boule noire est $C_3^7 \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 = \dfrac{2835}{16384} \simeq 0,1730$

10.2.5 Variable aléatoire

Etude d'un exemple

Une urne contient cinq boules rouges et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne. On convient que chaque boule rouge tirée rapporte 100f. On dira qu'elle rapporte un gain égal à 100 et à chaque boule noire tirée fait perdre 50f on dit qu'elle rapporte un gain égale à -50. On appelle gain du tirage, la somme des gains rapportés par les deux

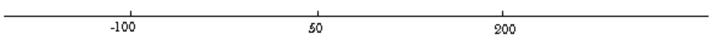
boules tirées.
On note X l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à chaque éventualité ω associe le gain du tirage $X(\omega)$.
Ω est l'univers des éventualités associées aux tirages.

1. Décrire l'univers Ω.
2. Quels sont les gains possibles des tirages ? Ces gains sont appelés les valeurs prises par X.
3. On note $[X = x]$ l'événement $\ll$le gain du tirage est $x \gg$. Pour chaque valeur x obtenue à la question 2, calculer la probabilité $p[X = x]$.
4. On note $[X \leq t]$ l'événement $\ll$le gain du tirage est inférieur ou égal à $t \gg$.
   Soit F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ F(t) = p[X \leq t]$$
   .
   Définir (calculer) $F(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et la representer graphiquement.

Solution

1. L'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des groupes de deux boules tirées parmi les 8. $card(\Omega) = C_8^2 = 28$.
2. Valeurs prises par X(ensemble des gains) : -100 ;50 ;200.
3. $[X = x]$ l'événement $\ll$le gain du tirage est $x \gg$.
   $[X = -100]$ l'événement $\ll$le gain du tirage est $-100 \gg$, on $\ll$tire deux boules noires$\gg$.
   $* \ p[x = -100] = \dfrac{C_3^2}{28} = \dfrac{3}{28}$
   $* \ p[X = 50] = \dfrac{C_3^1 \times C_5^1}{28} = \dfrac{15}{28}$
   $* \ p[X = 200] = \dfrac{C_5^2}{28} = \dfrac{10}{28}$
4.

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & F(t) = p[X \leq t] \end{array}$$

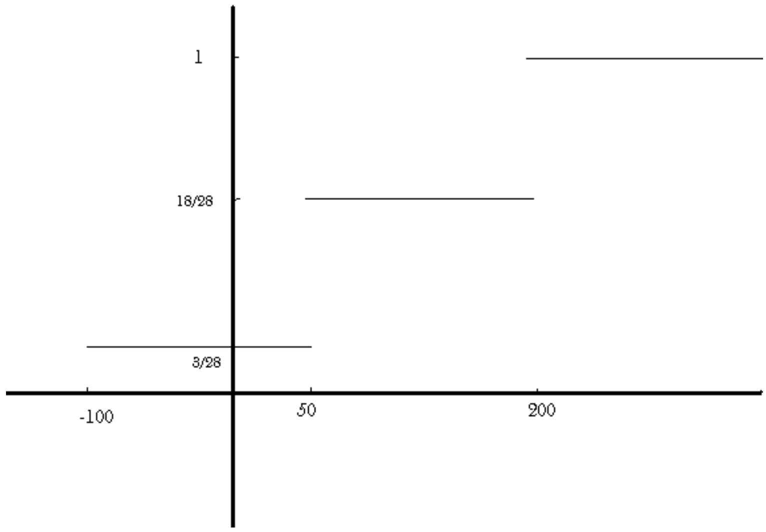


- Si $t \in]-\infty; -100[;\ F(t) = p[X \leq t] = p(\emptyset) = 0$
- Si $t \in [-100; 50[;\ F(t) = p[X \leq t] = p[X = -100] = \dfrac{3}{28}$
- Si $t \in [50; 200[;\ F(t) = p[X \leq t] = p([X = -100] \cup [X = 50]) = p[X = -100] + p[X = 50] = \dfrac{18}{28}$
- Si $t \in [200; +\infty[;\ F(t) = p[X \leq t] = p([X = -100] \cup [X = 50] \cup [X = 200]) = 1$

Récapitulatif

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t \in]-\infty; -100[\\ \dfrac{3}{28} & \text{Si } t \in [-100; 50[\\ \dfrac{18}{28} & \text{Si } t \in [50; 200[\\ 1 & \text{Si } t \in [200; +\infty[\end{cases}$$

On reconnait une fonction en escalier croissante sur $\mathbb{R}$.



10.2.5.1 Définition

Soit Ω un univers fini d'éventualités associé a une épreue aléatoire. p une probabilité sur Ω. On appelle variable aléatoire ou aléa numérique sur Ω toute application définie de Ω vers $\mathbb{R}$.

NB :

* En géneral, on désigne une variable aléatoire par les lettres X, Y etc
* Pour définir une variable aléatoire X définie sur Ω, il suffit de donner les images par X de chacune des éventualités de Ω. Ces images sont appelés les valeurs prises par X. Leur ensemble se note $X(\Omega)$.
* Si $x \in X(\Omega)$ on note $[X = x]$ l'événement dont les éventualités ont pour image x par X.

$$\boxed{[X = x] = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x\}}$$

$$\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ et } x \notin X(\Omega);\ [X = x] = \emptyset}$$

10.2.5.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit Ω un univers fini d'éventualités associés à une épreuve aléatoire. p une probabilité sur Ω, X une variable aléatoire sur Ω.
On appelle loi de probabilité de X l'application definie de $X(\Omega)$ vers $[0; 1]$ par $x \longmapsto p[X = x]$.
NB : on définit la loi de probabilité de X en donnant l'image de chacune des valeurs prises par X. si

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

on définit la loi de probabilité en calculant $p[X = x_1], p[X = x_2], \ldots, p[X = x_k]$.

10.2.5.3 Fonction de repartition d'une variable aléatoire

Définition
Soit X une variable aléatoire sur un univers fini d'éventualités Ω. p une probabilité sur Ω. Soit p' la loi de probabilité de x. $p'(x) = p[X = x]$.

On appelle fonction de repartiton de X l'application F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\boxed{\forall\ t \in \mathbb{R};\ F(t) = p[X \leq t]}$$

où

$$[X \leq t] = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq t\}$$

Propriétés

Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, la fonction de repartition F de X verifie :
$*\ \forall\ t \in]-\infty; x_1[,\ F(t) = 0$
$*\ \forall\ t \in [x_1, x_2[,\ F(t) = p'(x_1) = p[X = x_1]$
$*\ \begin{cases} \forall\ t \in [x_i, x_{i+1}[,\ F(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=i} p'(x_j) \\ \forall\ i \in \{1, \ldots, k-1\} \end{cases}$
$*\ \forall\ t \in [x_k, +\infty[,\ F(t) = 1$

10.2.5.4 Espérance mathématiques, Variance, Ecart-type

Soit une variable aléatoire définie sur un univers fini d'éventualité Ω muni d'une probabilité p. Soit p' la loi de probabilité de X.
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X.

a) On appelle espérance mathématiques de X ou moyenne de X le réel noté $E(X)$ défini par :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p'(x_i)}$$

b) On appelle variance de X le réel noté $V(x)$ définie par :

$$\boxed{V(x) = \sum_{i=1}^{i=n} [x_i - E(X)]^2 p'(x_i)}$$

Remarque : $[x_i - E(X)]^2 = x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)$ donc :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p'(x_i) - \sum_{i=1}^{i=n} 2x_i E(X) p'(x_i) + \sum_{i=1}^{i=n} E^2(X) p'(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p'(x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{i=n} x_i p'(x_i) + E^2(X) \sum_{i=1}^{i=n} p'(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} (x_i)^2 p(x_i) - 2E(X).E(X) + E^2(X) \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} (x_i)^2 p'(x_i) - 2E^2(X) + E^2(X) \\
V(X) &= \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p'(x_i) - E^2(X)
\end{aligned}$$

$\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2 p'(x)$ se note $E(X^2)$:

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

c) On appelle écart-type le réel $\sigma(X)$ défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exemple
Considérons l'exemple étudié en début de paragraphe.
Les valeurs prises par X sont : -100 ;50 ;200
Loi de probabilité

x	*-100*	*50*	*200*
$p[X = x]$	$\frac{3}{28}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{10}{28}$

Donc $E(X) = -100 \times \dfrac{3}{28} + 50 \times \dfrac{15}{28} + 200 \times \dfrac{10}{28} = \dfrac{2450}{28} = 87,5$
$V(X) = (-100)^2 \times \dfrac{3}{28} + (50)^2 \times \dfrac{15}{28} + (200)^2 \times \dfrac{10}{28} - \left(\dfrac{175}{2}\right)^2 = \dfrac{253125}{28} = 9040,17$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 95,07$

Exemple
Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges. On tire simultanément 5 boules de l'urne en supposant l'équiprobabilité des tirages. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
Calculer $E(X), V(X)$ et $\sigma(X)$.

10.2.5.5 Variable aléatoire binomiale

Considérons une épreuve de Bernouilli dont les éventualités sont S et E de probabilité respectives p et $1 - p$.
On éffectue n fois ($n \geq 1$) cette épreuve de Bernouilli. Soit X la variable aléatoire égale aux nombres de fois que l'éventualité S a été obtenue au bout de n répétition.
X s'appelle la variable aléatoire binomiale de paramètre n et p.
Les valeurs prises par X sont : $1; 2; \ldots; n$.
soit p' la loi de probabilité de X.
$\forall\ k \in \{0, 1, 2 \ldots, n\};\ p'(k) = p[X = k] = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kp'(x) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

On démontre que

$$\boxed{E(X) = np}$$

$$V(X) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} - n^2 p^2$$

On démontre que

$$\boxed{V(X) = np(1 - p)}$$

Exemple

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges. On tire une boule de l'urne en supposant l'équiprobabilité des tirages. On éffectue 6 tirages successifs d'une boule avec remise. Spoit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées au bout des 6 tirages.

Solution :

Chaque tirage est une épreuve de Bernouilli. Obtenir une boule rouge a pour probabilité $\dfrac{4}{10}$.

X *est une variable aléatoire binomiale de paramètre 6 et* $\dfrac{2}{5}$.

Loi de probabilité :

- $E(X) = 6 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{12}{5}$
- $V(X) = \dfrac{12}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{36}{25}$
- $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{6}{5}$

11 Courbes paramétrées planes

11.1 Définition

11.1.1 Représentation paramétrique d'une courbe

On considère la plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $t \in I$, on associe le point $M_t(f(t); g(t))$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M_t pour t parcourant I est appelée courbe paramétrée de paramètre t associée aux fonctions f et g.
Pour toute valeur t_0 de t, le point M_0 est appelé le point de paramètre t_0.
Le système $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ t \in I \end{cases}$ est appelé une représentation paramétrique de la courbe $(\mathcal{C})$ ou système d'équations paramétrique de la courbe $(\mathcal{C})$.

Exemple
Soient f la fonction numérique définie par $f(t) = t + 1$ et g la fonction numérique définie par $g(t) = 2t$.
La fonction paramétrée définie par f et g a pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = t + 1 & (1) \\ y = 2t & (2) \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

NB : Si on établit une relation indépendante entre x et y on obtient une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$. DE (1) on en déduit que $t = x - 1$; (2) devient $y = 2(x - 1) = 2x - 2$.
Une équation de la courbe associée est $y - 2x + 2 = 0, \ x \in \mathbb{R}$. La courbe est donc la droite d'équation $y = 2x - 2$.
Soit le système $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2 - 6t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\begin{aligned} y &= 2 - 6\left(\frac{2 - x}{3}\right) \\ y &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Soient les systèmes paramétrées suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Soient $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2), (\mathcal{C}_3)$ les courbes représentées par les systèmes $(S_1), (S_2), (S_3)$.
* $(\mathcal{C}_1)$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1;\ x \in [-1; 1]$
* $(\mathcal{C}_2$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1;\ x \in [-1; 1]$ et $y \in [0; 1]$
* $(\mathcal{C}_3)$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1;\ x \in [0; 1]$ et $y \in [0; 1]$

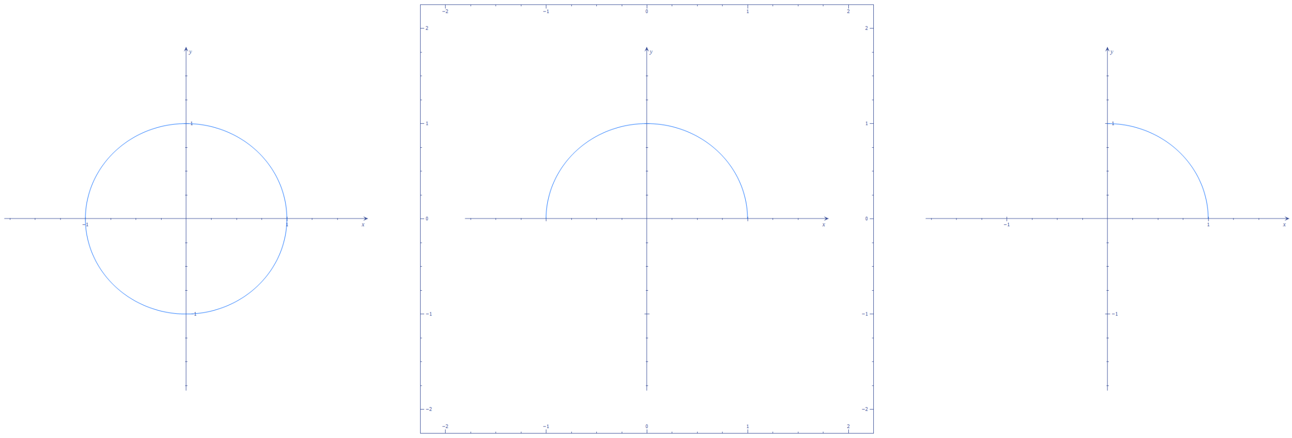


FIGURE 11.1 – Courbe $(\mathcal{C}_1)$ (à gauche),Courbe $(\mathcal{C}_2)$ (au centre),Courbe $(\mathcal{C}_3)$ (à droite)

11.1.2 Réduction de l'ensemble d'étude d'une courbe paramétrée

Soit $(\mathcal{C})$ une courbe paramétrée dont un système de représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ t \in I \end{cases}$$

Comparer les points M_t et M_{-t} :

1. lorsque f et g sont paires.
2. lorsque f est paire et g est impaire.
3. lorsque f est impaire et g est paire.
4. lorsque f et g sont impaires.
5. lorsque f et g sont périodiques.

Solutions :

1^{er} *cas* : **f et g sont paires.**

$\forall\, t \in I, -t \in I$
$f(-t) = f(t)$
$g(-t) = g(t)$
alors $M\_t = M_t$.
Dans ce cas il suffit d'étudier la courbe $(\mathcal{C})$ sur $I \cap [0; +\infty[$.

$2^{\text{ème}}$ *cas* : **f est paire et g impaire.**

$\forall\, t \in I; f(-t) = f(t)$ et $g(-t) = -g(t)$.
Dans ce cas M_t et M_{-t} sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Il suffit alors d'étudier $(\mathcal{C})$ sur $I \cap [0; +\infty[$; construire la partie $(\mathcal{C}_1)$ de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe des abscisses : on a alors $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$.

$3^{\text{ème}}$ *cas* : f **impaire et** g **paire.**
$\forall\, t \in I; f(-t) = -f(t)$ or $g(-t) = g(t)$
M_t et M_t sont dans ce cas symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit d'étudier $(\mathcal{C})$ sur $I \cap [0; +\infty[$.
Construire la partie $(\mathcal{C}_1)$ de $(\mathcal{C})$ correspondante et sa symétrique $(\mathcal{C}_2)$ par rapport à l'axe des ordonnées alors $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$

$4^{\text{ème}}$ *cas* : f **et** g **impaires.**
$\forall\, t \in I; f(-t) = -f(t)$ et $g(-t) = -g(t)$.
M_t et M_t sont alors symétriques par rapport à l'origine. Il suffit d'étudier $(\mathcal{C})$ sur $I \in [0; +\infty[$.
Construire la partie $(\mathcal{C}_1)$ de $(\mathcal{C})$ correspondante et sa symétrique $(\mathcal{C}_2)$ par rapport à l'origine. Alors $(\mathcal{C})$=$(\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$.

$5^{\text{ème}}$ *cas* : f **et** g **sont périodiques.**
Si f est périodique de période T_1, g est périodique de période T_2 positive alors le réel
$T = ppcm(T_1, T_2)$ est la plus petite période commune à f et g. Si T est la plus la plus petite période positive commune à f et à g on a $f(t+T)$=$f(t)$ et $g(t+T)$=$g(t)$ donc $M_t = M_{t+T}$.
On démontre que dans ce cas on obtient toute la courbe $(\mathcal{C})$ en la construisant sur tout intervalle d'amplitude T.

11.1.3 Vecteur dérivé

On considère le plan muni d'un répère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(\mathcal{C})$ une courbe paramétrée définie par le système :

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad \text{Soit } t_0 \in I. \\ t \in I \end{cases}$$

Si f et g sont dérivables en t_0 alors le vecteur $\overrightarrow{V}(t_0) = f'(t_0)\vec{i} + g'(t_0)\vec{j}$ est appelé le vecteur dérivé en t_0.
Si $\overrightarrow{t_0} \neq \overrightarrow{0}$ alors la droite passant par le point M_{t_0} et ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{t_0}$ est la tangente à $(\mathcal{C})$ en M_t.
Remarque : *Interprétation cinématique.*
Si t représente le temps et M un point mobile qui parcourt la courbe $(\mathcal{C})$ lorsque t varie sur l'intervalle I. On dit que la courbe $(\mathcal{C})$ est la trajectoire du point M. Le vecteur $\overrightarrow{V}(t_0)$ est appelé le vecteur vitesse instantané du point M à l'instant t_0.
Si les fonctions f et g sont dérivables sur I. On dit que le mouvement de M est uniforme(resp accéléré ou retardé) si la fonction $t \longmapsto ||\overrightarrow{V}(t)||$ est constante (resp strictement croissante ou respectivement décroissante)
Si f et g deux fois dérivables sur I le vecteur $\overrightarrow{\Gamma} = f''(t_0)\vec{i} + g''(t_0)\vec{j}$ s'appelle le vecteur accéleration du mobile M.

11.2 Etude de quelques exemples

11.2.1 Exemple 1

Soit la courbe paramétrée définie par le système :

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 2 \\ y = 3t - t^3 \\ t \in [-2; 2] \end{cases}$$

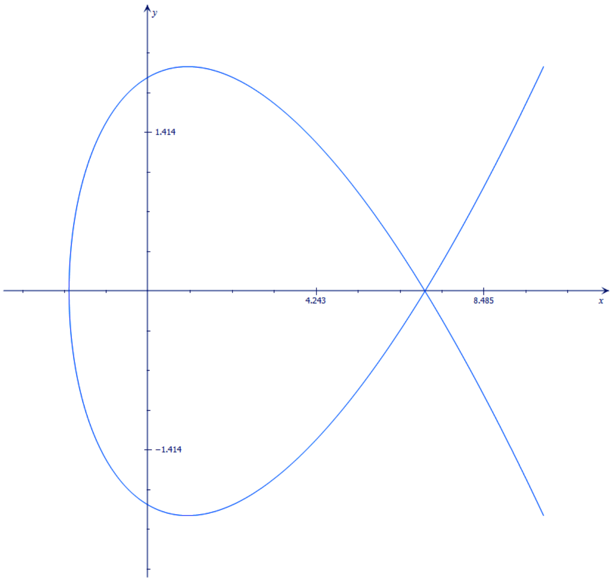
Etudier et représenter $(\mathcal{C})$.

Solution :

Posons $f(t) = 3t^2 - 2; g(t) = 3t - t^3$.
On peut constater que f est paire et g impaire.
M_t et $M_{-}t$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On va étudier $(\mathcal{C})$ sur $[0; 2]$.
$\forall\ t \in [0; 2]\ f'(t) = 6t\ ;\ g'(t) = 3 - 3t^2$
$g'(t) = 3(1-t)(1+t)$
$f'(t) \geq 0,\ \forall\ t \in [0; 2]\,;$
$g'(t) \geq 0 \Longleftrightarrow t \in [0; 1]$
$g'(t) \leq 0 \Longleftrightarrow t \in [1; 2]$

Tableau de variation

t	0		1		2
$f'(t)$	0	$+$	6	$+$	12
$g'(t)$	3	$+$	0	$-$	-9
$f(t)$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	10
$g(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2



11.2.2 Exemple 2

Soit la courbe paramétrée $(\mathcal{C})$ définie par le système :

$$\begin{cases} x = e^{\sin t} \\ y = \cos t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que les fonctions $t \longmapsto e^{\sin t}$ et $t \longmapsto \cos t$ sont périodiques de période 2π.
   (b) Comparer M_t et $M_{\pi-t}$, $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la connaissance de $(\mathcal{C})$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ permet d'obtenir $(\mathcal{C})$ où $t \in \mathbb{R}$.
3. Etudier les fonctions $t \longmapsto e^{\sin t}$ et $t \longmapsto \cos t$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ puis consigner les résultats de l'étude dans un seul tableau de variation.
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Solution :

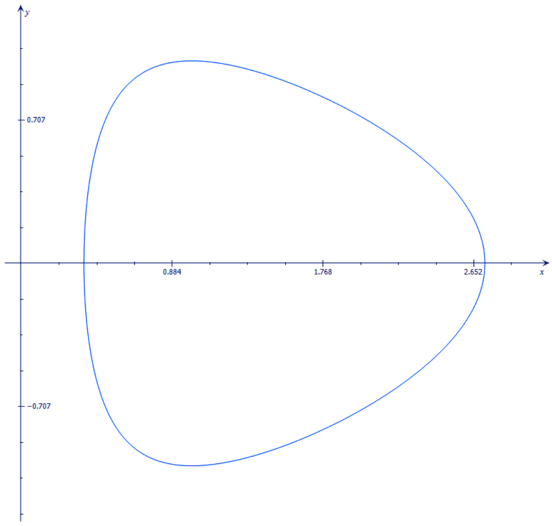
1. (a) On a : $\forall\ t \in \mathbb{R};\ x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$ donc $t \longmapsto e^{\sin t}$ et $t \longmapsto \cos t$ sont périodiques de période 2π.
   (b) $\forall\ t \in \mathbb{R};\ x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ donc M_t et $M_{\pi-t}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
2. les fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sont périodiques de période 2π. On obtient toute la courbe $(\mathcal{C})$ en la construisant sur tout intervalle d'amplitude 2π.
   Soit $(\mathcal{C}_1)$ la partie de $(\mathcal{C})$ dont le paramètre t des points est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   Soit $(\mathcal{C}_2)$ le symétrique de $(\mathcal{C}_1)$ par rapport à l'axe des abscisses.

$(\mathcal{C}_2)$ est la partie de $(\mathcal{C})$ dont le paramètre des points t est dans $\left[\pi - \dfrac{\pi}{2}, \pi - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ i.e $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
$(\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$ est alors la partie de $(\mathcal{C})$ dont le paramètre des points t est dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ or $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ a pour amplitude 2π donc $(\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2) = (\mathcal{C})$

3. Etude des fonctions sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   On a : $x'(t) = \cos t \; e^{\sin t}$ et $y'(t) = -\sin t$
   $*$ $x'(t) \geq 0 \; \forall \; t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc x est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   $*$ $y'(t) \geq 0 \Longleftrightarrow t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ donc y est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.
   $*$ $y'(t) \leq 0 \Longleftrightarrow t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc y est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Tableau de variation

t	$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	1	$+$	0
$y'(t)$	1	$+$	0	$-$	-1
$x(t)$	e^{-1}	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



4.

11.2.3 Exemple 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ $(||\overrightarrow{i}|| = 1\text{cm}\,;\ ||\overrightarrow{j}|| = 3\text{cm})$. On considère la courbe $(\mathcal{C})$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = t - 2\sin t \\ y(t) = \cos t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A tout instant t ; M_t est le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1. Montrer que le point $M_{t+2\pi}$ est l'image de M_t par une translation dont on précisera le vecteur de translation.
2. Montrer M_t et M_{-t} sont symetriques par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Calculer $x'(t)$ et montrer que $\begin{cases} x'(t) \leq 0 & \text{pour } t \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right] \\ x'(t) \geq 0 & \text{pour } t \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \pi\right] \end{cases}$
4. Etudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun, pour $t \in\ [0; \pi]$
5. Tracer la partie $(\mathcal{C}_1)$ de $(\mathcal{C})$ correspondant à $t \in [-\pi; \pi]$
6. Dire comment à partir de $(\mathcal{C}_1)$ on peut obtenir la partie $(\mathcal{C}_2)$ de $(\mathcal{C})$ correspondant à $t \in [-\pi; 3\pi]$.

   On donne : $\dfrac{\pi}{2} - 2 \simeq -0,4;\ \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3} \simeq -2$

Solution

1. On a : $\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$ donc $\overrightarrow{M_tM_{t+2\pi}} = 2\pi\overrightarrow{i}$ d'où $M_{t+2\pi}$ est l'image de M_t par la translation du vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$.

2. On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc M_t et M_{-t} sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
3. $\forall\ t \in \mathbb{R},\ x'(t) = 1 - 2\cos t$

   $*$ Si $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right],\ \cos t \geq \dfrac{1}{2}$. Par suite $x'(t) \leq 0$.

   $*$ Si $t \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \pi\right],\ \cos t \leq \dfrac{1}{2}$. Par suite $x'(t) \geq 0$.
4. D'après la question précédente on a $t \longmapsto x(t)$ est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{3}; \pi\right]$ et décroissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

   $\forall\ t \in \mathbb{R},\ y'(t) = -\sin t$ c'est-à-dire $y'(t) \leq 0$, par conséquent $t \longmapsto y(t)$ est décroissante sur $[0, \pi]$.

   Tableau de variation

t	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$x'(t)$	-1	$-$	0	$+$	3
$y'(t)$	0	$-$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-$	0
$x(t)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	π
$y(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	-1

5. Tracer de $(\mathcal{C})$: Soit $(\mathcal{C}_3)$ la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à $t \in [0, \pi]$. $(\mathcal{C}_1)$ est alors $(\mathcal{C}_3) \cup S_{(\overrightarrow{OJ})}(\mathcal{C}_3)$.
6. Soit $(\mathcal{C}_1')$ l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par la translation du vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$. $(\mathcal{C}_1')$ est l'ensemble des points de paramètre t avec $t \in [\pi; 3\pi]$. $[-\pi; \pi] \cup [\pi; 3\pi] = [-\pi; 3\pi]$ donc $(\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_1') = (\mathcal{C})$.

12

Géométrie dans l'espace

12.1 Vecteur dans l'espace

12.1.1 Définition

La donnée de deux points distincts A et B de l'espace définie le vecteur d'origine A et d'extrémité B noté $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par :

* Sa direction (celle de la droite (AB)).
* Son sens (celui de déplacement de A vers B).
* Sa longueur ou norme (Longueur du segment $[AB]$) notée $||\overrightarrow{AB}||$ ou AB.

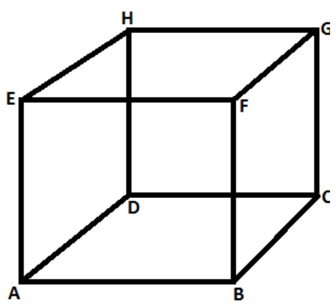
La donnée de deux points confondus A et B définie un vecteur de longueur nulle sans direction ni sens noté $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{O}$.
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace sont égaux et on note ($\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$) si et seulement si ils ont même direction, même sens, même longueur.
NB : on définit dans l'ensemble des vecteurs de l'espace une addition notée (+) qui a les mêmes propriétés que celle définie dans l'ensemble des plans. De même on définie le produit d'un vecteur dans l'espace par un réel qui a les mêmes proprietés que le produit.

12.1.2 Vecteurs coplanaires

12.1.2.1 Définition

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. A un point de l'espace, soient B, C et D les points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{w}$. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsque les points A, B, C, D sont coplanaires.

Exemple



A, B, C et D sont coplanaires donc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
A, B, C et E ne sont pas coplanaires donc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

12.1.2.2 Théorème

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ de l'espace sont coplanaires si et seulement si l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres.
NB : $\overrightarrow{w}$ est combinaison lineaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ signifie qu'il existe deux réels α et β tel que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}$ sont-ils coplanaires ?
  Oui, car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ (relation de chasles)
* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils coplanaires ?
  Si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EF}$ étaient coplanaires il existerait deux réels a et b tel que :
  $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{EF} = (a+b)\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ ce qui est faux car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ n'ont pas la même direction.

12.2 Base et repère de l'espace

12.2.1 Définition

a) On appelle base de l'espace tout triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires.

b) On appelle repère de l'espace tout quadriplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où O est un point de l'espace et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base.

12.2.2 coordonnées d'un vecteur, coordonnées d'un point

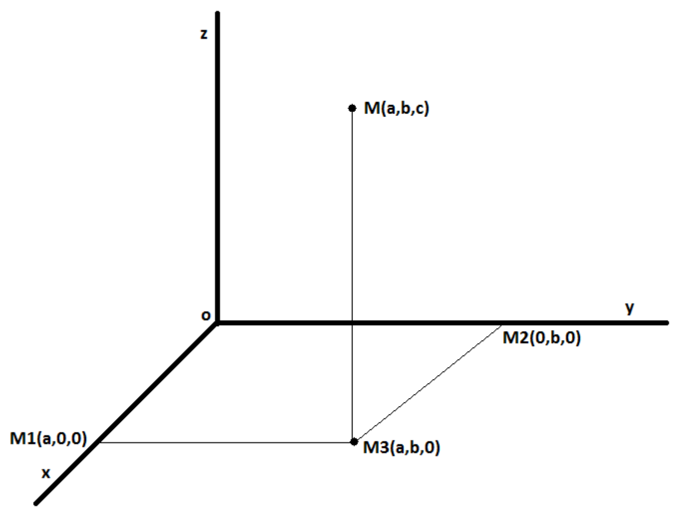
a) Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un triplet (x, y, z) de réels et un seul tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.
Ce triplet s'appelle le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note $(x; y; z)$.

b) Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace les coordonnées $(x; y; z)$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ s'appelle les coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ on note $M(x; y; z)$.
$M(x; y; z) \iff \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

* x s'appelle l'abscisse de M.
* y s'appelle l'ordonnée de M.
* z s'appelle la cote de M.

Placer $M(a, b, c)$.
On place $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$.

$\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ alors M est tel que :



12.3 Orthogonalité dans l'espace

12.3.1 vecteur orthogonaux

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont perpendiculaires lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit.
$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont orthogonales lorsque leurs parallèles respectives menées d'un même point sont perpendiculaires.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nul. Soient A, B, C, D quatre points telS que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{v}$. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. On note alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.
Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

12.3.2 Base et repère orthonormé

a) On dit qu'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace est orthogonale lorsque $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont deux à deux orthogonaux.
Si de plus $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$ la base est dite orthonormale.

b) On dit qu'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthogonal (resp orthonormal) si la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormale (resp orthonormale)

12.3.3 Distance de deux points de l'espace

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal de l'espace. Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. la distance de A à B noté AB est le réel $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

12.4 Produit scalaire dans l'espace

12.4.1 Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient A, B, C trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. Il existe un plan contenant A, B et C . On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\overrightarrow{AC}$ calculé dans ce plan.

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ se note $\overrightarrow{u}^2$ et $\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$

12.4.2 Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, a et b deux réels :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
2. $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leq ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$
3. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$
4. $(a\overrightarrow{u}).(b\overrightarrow{v}) = (ab)\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
5. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$
6. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$

Une droite $(\mathcal{D})$ admettant $\overrightarrow{u}$ comme vecteur directeur et un plan $(\mathcal{P})$ admettant les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ comme vecteur de base sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$

12.4.3 Vecteur normal à un plan

12.4.3.1 Définition

$(\mathcal{P})$ et $\overrightarrow{u}$ sont respectivement un plan et un vecteur de l'espace $\overrightarrow{u}$ est normal à $\mathcal{P}$ lorsque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

12.4.3.2 Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur et $(\mathcal{P})$ un plan. $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colineaires de $(\mathcal{P})$.
Si $(\mathcal{P})$ est un plan passant par un point A et $\overrightarrow{u}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ alors pour tout point M de $(\mathcal{P})$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = 0$.
Si A est un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul alors le plan pasant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = 0$.
Soient A est un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, k un réel. L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = k$ est un plan dont $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal.

12.4.4 Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormal

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal de l'espace. Soient $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ deux vecteurs.
On a :

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Cas particulier : $||\overrightarrow{u}||^2 = \overrightarrow{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$
Conséquences :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
On a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ donc

$$\boxed{\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||}}$$

Exemple

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère un point $A(1;2;0)$ et le vecteur $\vec{u}(1;0;-2)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par A dont un vecteur normal est $\vec{u}$.

Soit $M(x;y;z)$:

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{P}) &\iff \vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ &\iff x - 2z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ est : $x - 2z - 1 = 0$

Remarque

Soient a, b, c, d quatre réels avec a, b, c non tous nuls. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{u}(a, b, c)$.

Exemple

Soient $A(2;0;1), B(1;4;1)$ et $C(3;1;0)$. Donner une équation de (ABC).

Soit $ax + by + cz + d = 0$ une équation de ce plan.
On a donc :

$$\begin{cases} 2a + c + d = 0, & (1) \\ a + 4b + c + d = 0 & (2) \\ 3a + b + d = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) - (2) \longrightarrow a - 4b = 0$
$(1) - (3) \longrightarrow -a - b + c = 0 \Longrightarrow b = \dfrac{c}{5}$ *et* $a = \dfrac{4c}{5}$.
(1) *devient* $\dfrac{8c}{5} + c + d = 0 \Longrightarrow d = -\dfrac{13c}{5}$
On a $c \neq 0$ *donc* $\dfrac{4c}{5}x + \dfrac{c}{5}y + cz - \dfrac{13c}{5} = 0 \Rightarrow \dfrac{c}{5}(4x + y + 5z - 13 = 0)$ *d'où*

$$\boxed{(\mathcal{P}) : 4x + y + 5z - 13 = 0}$$

12.5 Produit vectoriel dans l'espace

12.5.1 Orientation dans l'espace

Orienter l'espace c'est choisir un sens positif. Il existe plusieurs techniques d'orientation de l'espace. Celle que nous utilisons est la technique règle de l'obserateur d'ampère :
On considère un repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et un observateur debout et les pieds en O. La tête vers C regardant A en face. On dira que le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est direct si l'observateur à le point B à sa gauche. Dans le cas contraire, le repère sera dit indirect.

Remarque

Si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace et si A, B et C sont trois points tels que :
$\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$.
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct si $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est direct.

12.5.2 Produit vectoriel de deux ecteurs

12.5.2.1 Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{w}$ défini par :

$*$ $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

$*$ Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires ; $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe.

Norme de $\overrightarrow{w}$:

$$\boxed{||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times |\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})|}$$

.
Dans tous les cas $\overrightarrow{w}$ se note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ($\overrightarrow{u}$ vectoriel $\overrightarrow{v}$).
Remarque ! Soient quatre points tels que :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ alors si A, B, C sont alignés alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.
Si A, B, C et D ne sont pas alignés $(AD) \perp (AB)$, $(AD) \perp (AC)$.
(AD) est perpendiculaire à (ABC).
$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est direct $\overrightarrow{AD} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}||.\sin \widehat{BAC}$.

12.5.2.2 Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.

P_1 : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

P_2 : Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal au plan admet $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ pour vecteur de base.

P_3 : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

P_4 : Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormale directe du plan alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthnormale directe de l'espace.

P_5 : $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$

P_6 : $(a\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = a(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ avec a un réel.

P_7 : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$

12.5.2.3 Expression analytique

Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormale, $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$.
On a :
$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$;
$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) \\
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

Exemple

L'espace est rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. *Soient* $\overrightarrow{u}\left(\frac{8}{9}; \frac{1}{9}; \frac{-4}{9}\right)$, $\overrightarrow{v}\left(\frac{1}{9}; \frac{8}{9}; \frac{4}{9}\right)$, $\overrightarrow{w}\left(\frac{4}{9}; \frac{-4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.
Montrer que $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$ *est une base orthonormée et préciser son sens.*

Solution :
Il faut établir que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$; $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$; $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||||\overrightarrow{w}|| = 1$.
En effet, on a : $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||||\overrightarrow{w}|| = 1$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ *donc* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 0$ *donc* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$.
$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = 0$ *donc* $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.

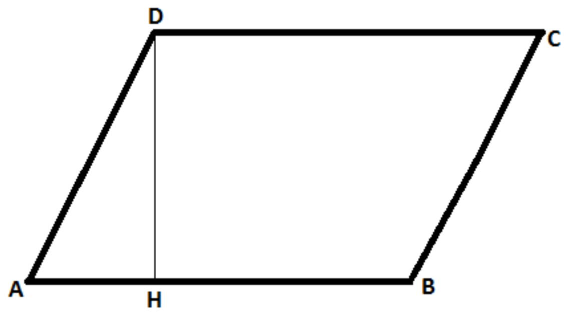
On en déduit que $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$ *est un repère orthonormé.*
De plus, on a :
$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \left(\frac{4}{9}; \frac{-4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ *donc* $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$ *est directe.*

12.5.3 Application du produit vectoriel

12.5.3.1 Aire d'un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati.



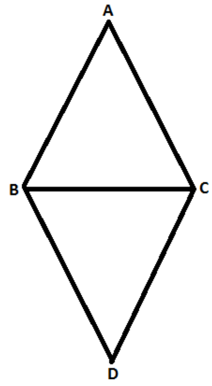
Soit H le projeté orthogonal de D sur (AB).
L'aire de $ABCD$ est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= AB \times DH \\
\mathcal{A} &= AB \times AD \sin \widehat{BAD} \\
\mathcal{A} &= ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AD}|| \times |\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}})| = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire d'un parallélogramme } ABCD \text{ est } ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||}$$

12.5.3.2 Aire d'un triangle

Soit ABC un triangle.



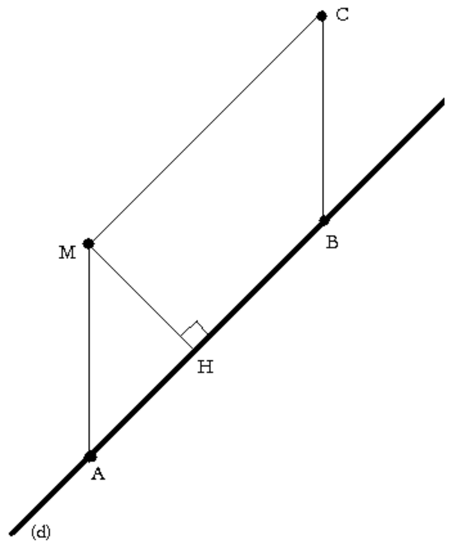
Soit D tel que $ABDC$ est un parallélogramme.
L'aire de ABC est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \text{ aire de } (ABDC) \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|| \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire d'un triangle } ABC \text{ est } \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||}$$

12.5.3.3 Distance d'un point à une droite

Soit (d) une droite. A et B deux points distincts de (d). M un point de l'espace.



* Si $M \in (AB)$ alors la distance de M à (d) est égale à 0.
* Si $M \in (AB)$, soit C le point de l'espace tel que $MABC$ est un parallélogramme.
  Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB).
  L'aire de $MABC$ vaut $AB \times MH = ||\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC}||$.

On a donc :

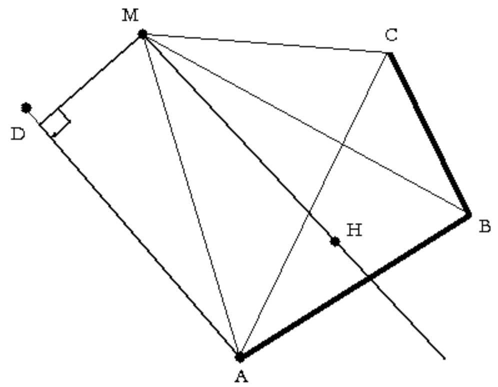
$$\begin{aligned} AB \times MH &= ||\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC}|| \\ &= ||\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC})|| \\ &= ||\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}|| \\ MH &= \frac{||\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}||}{||\overrightarrow{AB}||} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La distance d'un point } M \text{ à une droite } (AB) \text{ est } \frac{||\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}||}{||\overrightarrow{AB}||}}$$

12.5.3.4 Distance d'un point à un plan

Soit $(\mathcal{P})$ un plan. M un point de l'espace.

* Si $M \in (\mathcal{P})$ alors la distance de M à $(\mathcal{P})$ est égale à 0.
* Si $M \notin (\mathcal{P})$. On considère trois points non alignés A, B et C de $(\mathcal{P})$ et H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$.
  La distance de M à $(\mathcal{P})$ est MH.



Soit D le point de l'espace tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
Soit M' le projeté orthogonal de M sur (AD).

Le volume du tétraèdre $MABC$ est $\dfrac{1}{3}$ aire$(ABC) \times MH$.

$$\begin{aligned}
V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| &= \frac{1}{3}AD \times MH \\
&= \frac{1}{3}AD \times AM' \\
&= \frac{1}{3}AD \times AM \times |\cos \widehat{M'AM}| \\
&= \frac{1}{3}||\overrightarrow{AD}||.||\overrightarrow{AM}|| \times |\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM})| \\
V &= \frac{1}{3}|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM}| \quad \text{d'où} \\
MH &= \frac{\frac{1}{3}|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM}|}{\frac{1}{6}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||} \\
MH &= 2\frac{|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM}|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||} \\
MH &= 2\frac{|\overrightarrow{AM}.(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||} \\
MH &= \frac{|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La distance d'un point } M \text{ à un plan } (ABC) \text{ est } \frac{|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||}}$$

Exemple
$(O, \overrightarrow{i}, \overleftarrow{j}, \overleftarrow{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.
On considère les points $A(-1;4;5)$, $B(0;1;-1)$, $C(1;4;0)$ et $D(-3;5;0)$. Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre de sommet A. Calculer sa hauteur et son volume.

Solution :
$ABCD$ est un tétraèdre sssi $A \notin (BCD)$.
$\overrightarrow{BC}(1;3;1)$; $\overrightarrow{BA}(-1;3;6)$; $\overrightarrow{BD}(-3;4;1)$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}(-1;-4;12)$.
Finalement, $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA} = 67$.
$(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA} \neq 0$ donc $A \notin (BCD)$ et donc $ABCD$ est un tétraèdre.
La hauteur de ce tétraèdre est la distance de A à (BCD) :

$$h = \frac{|\overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD})|}{||\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}||} = \frac{67}{\sqrt{186}}$$

$V = \dfrac{1}{3}$ aire$(BCD) \times h$.
Aire$(BCD) = \dfrac{1}{2}||\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}|| = \dfrac{1}{2}\sqrt{186}$
On en déduit que $V = \dfrac{67}{6}$

13

Statistiques à deux variables

13.1 Tableau d'éffectif, distributions marginales

Exemple
On relève la taille et le poids de chacun des 20 élèves d'un établissement et on note chaque relevé sous la forme $(x_i; y_i)$ où x_i et y_i représentent respectivement la taille et le poids du i-ème élève. On obtient la liste suivante :

$$\begin{array}{cccc}
(162;55) ; & (159;58) ; & (178;74) ; & (166;62) \\
(158;56) ; & (163;61) ; & (171;66) ; & (178;79) \\
(168;64) ; & (168;62) ; & (156;58) ; & (161;68) \\
(172;66) ; & (166;63) ; & (185;84) ; & (179;73) \\
(166;64) ; & (177;72) ; & (166;63) ; & (166;62)
\end{array}$$

Ce rélevé constitue une série statistique quantitative double c'est-à-dire d'une série statistique à deux caractères quantitatifs qui sont la taille et le poids.
Si on note x la variable "taille" et y la variable de "poids".
Les réels x_i (resp y_i) des couples $(x_i; y_i)$ sont les valeurs de la variable x(resp y).

Remarque : *Si les valeurs sont trop nombreuses, on peut les régrouper en classe de taille et de poids comme ceci :*

Taille / *Poids*	$[155;165[$	$[165;175[$	$[175;185]$	*Effectifs marginaux*
$[55;65[$	*5*	*7*	*0*	*12*
$[65;75[$	*1*	*2*	*3*	*6*
$[75;85[$	*0*	*0*	*2*	*2*
Effectis marginaux	*6*	*9*	*5*	*Total = 20*

Ce tableau est un tableau d'éffectifs de la série dont les valeurs sont régroupées en classe. A partir de ce tableau on peut obtenir un tableau d'éffectifs d'une série à une variable à caractère quantitatif(taille ou poids). Une telle suite extraite s'appelle une distribution marginale. Les éffectifs correspondant s'appellent les éffectifs marginaux.

13.2 Nuage de points ; point moyen

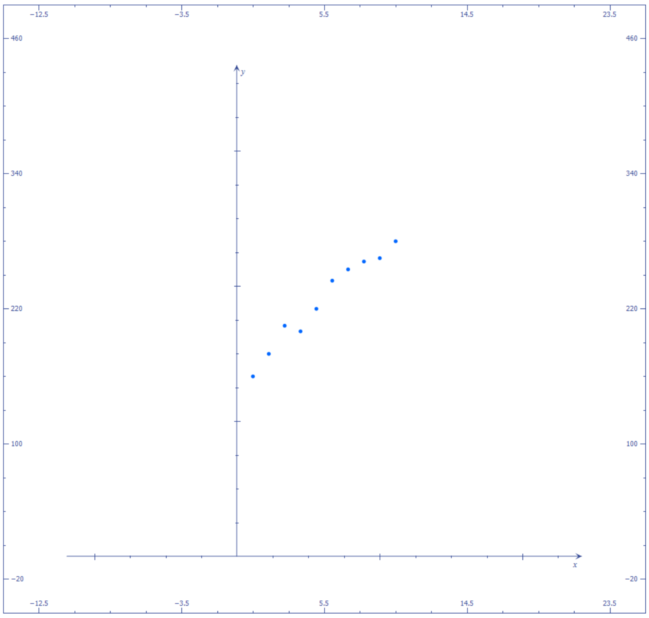
Considérons une série statistique à deux variables quantitatives discrète x et y.
Soient $(x_1; y_1); (x_2; y_2) \ldots ; (x_n; y_n)$ les valeurs de cette série.

$a)$ L'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$; $1 \leq i \leq n$ placé dans un plan muni d'un repère orthogonal s'ppelle le nuage de points associé à cette série.

$b)$ Soit $\overline{x}$ la moyenne des points $x_1; x_2; \ldots; x_n$ et $\overline{y}$ celle des valeurs $y_1; y_2; \ldots; y_n$.
Le point $G(\overline{x}; \overline{y})$ s'appelle le point moyen du nuage.

Exemple *1*
Soit la série statistique double définie par le tableau suivant :

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
y_i	*160*	*180*	*205*	*200*	*220*	*245*	*255*	*266*	*265*	*280*



$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = 5,5$$

et

$$\overline{y} = \frac{160+180+205+200+220+245+255+266+265+280}{10} = 227,2$$

Exemple *2*
Construire le nuage de points et placer le point moyen de la série.

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
y_i	*7*	*13*	*25*	*47*	*88*

$\overline{x} = 3$ *et* $\overline{y} = 36$

13.3 ajustement affine d'un nuage

13.3.1 Définition

Lorsque la forme du nuage de points d'une serie statistique à deux variables laisse penser qu'il est possible de tracer une droite passant le plus près possible des points du nuage on dit que l'on peut réaliser un ajustement affine ou ajustement linéaire de ce nuage. Une telle droite est appelée droite d'ajustement affine du nuage.
Exemple : on peut réaliser un ajustement affine du nuage des points de la série statistique de l'exemple 1 mais pas celui de serie statistique de l'exemple 2.

13.3.2 Methode d'ajustement affine

Soit une serie statistique double $(x_1; y_2), (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$ dont le nuage des points peut être ajusté. Il existe plusieurs manières de tracer la droite d'ajustement.

13.3.2.1 Tracer au jugé

A l'aide d'une règle on trace au jugé une droite que l'on estime passer le plus près possible de l'ensemble des points du nuage.

13.3.2.2 Utilisation du point moyen

On place un point moyen G du nuage et on trace une droite qui passe par G et qui passe le plus près possible des points du nuage.

13.3.2.3 Méthode de fractionnement ou méthode de Mayer

On partage le nuage de points en deux sous nuages dont les éffectifs ne diffèrent pas de plus d'un. On place les points moyens G_1 et G_2 des deux nuages. La droite (G_1G_2) est alors la droite d'ajustement affine.

Exemple
Considérons la serie statistique de l'exemple 1.
Ajustement le nuage de point par la méthode de Mayer en fractionnant le nuage en deux sous nuages des points d'abscisses paires et celui des points d'abscisse impaires.
Le premier sous nuage

2	*4*	*6*	*8*	*10*
180	*200*	*245*	*262*	*280*

Le point moyen du premier nuage : $G_1(6; 233,4)$.
Le deuxième sous nuage

1	*3*	*5*	*7*	*9*
160	*205*	*220*	*255*	*265*

Le point moyen du deuxième nuage : $G_2(5; 221)$.

$$\overrightarrow{G_1G_2}(-1; -12,4); \quad M(x; y) \in (G_1G_2) \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & -1 \\ y-233,4 & -12,4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{(G_1G_2) : y = 12,4x + 159}$$

Les trois méthodes ci-dessus ne sont pas les seules méthodes d'ajustement. IL en existe d'autres notamment une connue sous le nom de méthode d'ajustement des moindres carrés, mais leur étude n'est pas du programme.
Le nuage de points peut être ajusté par une courbe qui n'est pas une droite, mais untel ajustement n'est pas du pogramme.

Exercices

Exercice *1*
On considère la série statistique double donnée par le tableau suivant :

x_i	*111*	*123*	*176*	*183*	*191*	*145*	*162*	*134*	*160*
y_i	*12*	*37*	*21*	*43*	*62*	*77*	*92*	*80*	*32*

1. *Représenter le nuage de points de cette série.*
2. *Déterminer un ajustement de la série par la méthode de Mayer. On considérera les deux sous nuages ; celui formés par les cinq premier points et celui formés par les quatre dernier. Les abscisses étant par ordre croissant. Donner l'équation de la droite d'ajustement.*

Exercice *2*
Le tableau suivant donne pour chaque année le nombre de naissances enregistré dans une mairie.

Année	*1988*	*1990*	*1992*	*1994*	*1996*	*1998*
Rang x_i en année	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Nombre y_i de naissance	*374*	*a*	*334*	*312*	*b*	*266*

Lors d'un démenagement de cette mairie, les régistres de naissances des années 1990 et 1996 ont éte égarés de sorte que le nombre de naissances de ces années restent introuvables.
Mais un stagiaire y étant avant la perte des documents avait permis d'obtenir par la méthode de Mayer par régroupement des trois premiers points et des trois derniers point du nuage la droite d'ajustement de y en fonction de x d'équation $y = -22x + 397$.

1. *A combien peut-on estimer le nombre de naissances lors de l'année 1995 ?*
2. *On suppose que l'évolution des naissances restent semblables au cours des années.*
   (a) *Quel était le nombre de naissances au cours de l'année 2000 ?*
   (b) *A partir de quelle année y'aura t-il deux fois moins de naissances qu'en 1988 ?*
3. *Déterminer a et b.*

Solutions

Exercice *1*

1. *Après avoir re-ordonnée le tableau de naissances on obtient le nuage de points.*
2. $G_1(134,6; 47,6)$ *et* $G_2(178; 54,5)$.
3. *L'équation de la droite d'ajustement est :* $43,4y = 6,9x + 1137,1$

Exercice *2*

1. *Le nombre de naissance en 1995.*

   Le rang x_i *de l'année 1995 est* $\dfrac{9}{2} = 4,5$. *On a donc* $y = 298$.

   Le nombre de naissance en 1995 est de 298.

2. (a) *Le nombre de naissance au cours de l'an 2000.*
   Le rang x_i *de l'année 2000 est 7. On a* $y = 243$.
   Le nombre de naissance en 1995 est de 243.

   (b) *L'année où il y aura deux fois moins de naissances qu'en 1988 :*

$$y = \frac{374}{2} \Longleftrightarrow y = 187$$

$$-22x + 397 = 187 \Longleftrightarrow 22x = 210 \Longleftrightarrow x = \frac{210}{22} \simeq 9,54 \simeq 10$$

3. *Déterminons* a *et* b.

$$x_{G_1} = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$y_{G_1} = \frac{708+a}{3}$$

$$-22 \times 2 + 397 = \frac{708+a}{3} \Longrightarrow a = 351$$

$$x_{G_2} = \frac{4+5+6}{3} = \frac{15}{3}$$

$$y_{G_2} = \frac{578+b}{3}$$

$$-22 \times 5 + 397 = \frac{578+b}{3} \Longrightarrow b = 283$$